ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
91

For Senior & Graduate Courses

CP対称性の破れ

小林・益川模型から深める素粒子物理

◆

林 青司 著



サイエンス社

SGC ライブラリ-91

CP対称性の破れ

小林・益川模型から深める素粒子物理

林 青司 著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1〜35 省略（品切含）

36 応用のための確率論・確率過程
松本裕行著　本体 1876 円

38 複素ニューラルネットワーク
廣瀬明著　本体 1695 円

40 制御理論講義
木村英紀著　本体 1886 円

41 バイオインフォマティクスの基礎
冨田勝監修 斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 トポロジー入門
田中利史・村上斉 共著　本体 1886 円

43 アルゴリズムと計算量
谷聖一著　本体 1857 円

44 ゲーム理論のフロンティア
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

47 現代物理数学への招待
鈴木淳史著　本体 1876 円

49 ソリトンと物理学
戸田盛和著　本体 1876 円

50 確率的情報処理と統計力学
田中和之編著　本体 1857 円

51 超対称性理論
太田信義・坂井典佑 共著　本体 1819 円

52 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何
谷村省吾著　本体 1886 円

53 ゲノム進化を考える
斎藤成也著　本体 1429 円

54 非平衡統計力学
早川尚男著　本体 1790 円

55 超幾何関数入門
木村弘信著　本体 1857 円

56 相対性理論
三尾典克著　本体 1838 円

57 3 次元トポロジーの新展開
戸田正人著　本体 1867 円

58 数理・情報系のための整数論講義
木田雅成著　本体 1876 円

59 コンピュータ将棋の頭脳
小谷善行著　本体 1429 円

60 計算神経科学への招待
銅谷賢治著　本体 1429 円

61 演習くり込み群
柏太郎著　本体 1886 円

62 熱方程式で学ぶ逆問題
山本昌宏・金成燠 共著　本体 1429 円

63 重力理論講義
前田恵一著　本体 1886 円

64 代数幾何入門講義
小林正典著　本体 1876 円

65 ネットワーク科学への招待
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

66 物理のためのリー群とリー代数
窪田高弘著　本体 1886 円

67 量子暗号理論の展開
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 量子力学の考え方
根本香絵著　本体 1829 円

69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
細谷暁夫著　本体 1876 円

70 重点解説 基礎微分幾何
塩谷隆著　本体 1886 円

71 ε-δ 論法再入門
中神祥臣著　本体 1857 円

72 超関数・フーリエ変換入門
磯崎洋著　本体 1857 円

73 問題例で深める物理
香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円

74 非線形現象と微分方程式
小川知之著　本体 1781 円

75 数物系のための圏論
梶浦宏成著　本体 2143 円

76 超弦理論を学ぶための場の量子論
鈴木久男著　本体 2095 円

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著　本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著　本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著　本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著　本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著　本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著　本体 2381 円

83 共形場理論
伊藤克司著　本体 2238 円

84 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
宮下精二・轟木義一 共著　本体 2476 円

85 実例で学ぶ精度保証付き数値計算
中尾充宏・渡部善隆 共著　本体 2362 円

86 リーマン予想の数理物理
黒川信重・小山信也 共著　本体 2190 円

87 量子多体系の物理
藤本聡・川上則雄 共著　本体 2190 円

88 演習形式で学ぶリー群・リー環
示野信一著　本体 2381 円

89 弦理論の代数的基礎
髙橋篤史著　本体 2476 円

90 アインシュタイン方程式
白水徹也著　本体 2238 円

91 CP 対称性の破れ
林青司著　本体 2476 円

まえがき

本書の主目的は，素粒子の相互作用における CP 対称性の破れと，これを標準模型の枠内で 3 世代のクォーク，レプトンの導入により見事に説明した小林・益川模型について解説することである．また，標準模型とその立脚する理論体系であるヤン・ミルズ理論についても，必要となる重要な概念や基本事項の解説を行っている．更に，宇宙に我々を含め物質が存在できるのも CP 対称性の破れのおかげであり，現在の素粒子理論で宇宙の物質の起源がどのように理解可能か，についても簡単な解説を行う．

想定している主な読者としては，大学院の修士課程（博士前期課程）で多少でも素粒子物理学，場の量子論について学んだことのある大学院生であるが，各章において理解に必要な基礎的知識は可能な範囲で与えられているので，学部高学年で量子力学や相対性理論を一通り学び，こうした話題に興味のある学部生にも理解して頂けるのではと期待している．既に研究に従事されている研究者も含め，本書が何らかの理解の一助となれば大変幸いである．

2008 年度のノーベル物理学賞を受賞された，小林誠・益川敏英両教授と南部陽一郎教授の業績はいずれも「対称性の破れ」に関するものである．小林・益川両教授の対象業績は CP 対称性の破れに関する研究であり，また南部教授の業績は自発的対称性の破れに関するものである．これらの業績は離散的対称性と連続的対称性という，少し性質の違う対称性の破れを扱ったものであるが，いずれも標準模型の完成において決定的に重要な役割を果たしたという意味で共通している．標準模型は素粒子の性質と相互作用に関する正に標準的な確立された理論であり，素粒子の重力を除く 3 つの相互作用，特に電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に記述する非可換ゲージ理論（ヤン・ミルズ理論）である．ゲージ理論のひな形は電磁相互作用の理論である量子電気力学 (QED) であるが，ゲージ理論の大きな特徴の一つは QED に見られるように “繰り込み” 可能性であり，色々な物理量に関して明確な予言ができることである．しかしながら，そのままでは弱い相互作用に関わるゲージボソンが光子同様に質量を持てないことになり現実と合わない．この問題を解決したのが，南部教授により提唱された自発的対称性の破れの機構であり，これは繰り込み可能性というゲージ理論の美点を保持しながら上手にゲージ対称性を破る手法を提供するもので，標準模型の成立に本質的に重要な寄与をした．また，小林・益川模型も繰り込み可能なゲージ理論でいかに CP 対称性を破るかという問題を追求して誕生したものであり，その予言どおり 3 世代のクォーク，レプトンの存在が実証され，また本書でも議論するように小林・益川模型の予言する CP 非対称性が日本の KEK やアメリカの SLAC といった研究所での B 工場実験で予言どおりに確認されて，標準模型は最終的な確立に至った．

本書はこうした歴史的進展にある程度沿いながら，ゲージ理論（ヤン・ミルズ理論）としての標準模型の構造，性質を議論した上で，小林・益川模型における CP 対称性の破れの機構を解説すると

いう手順をとっている．特に小林・益川模型におけるCP対称性の破れは，クォークの質量差によって生じるフレーバー対称性の破れや，フレーバー間（世代間）の混合に伴って生じるため，ニュートリノ振動におけるCP対称性の破れを含め，フレーバーの物理に関する話題にも力点を置いた．

上述のように，小林・益川模型は非常な成功を収めた理論であり，その学習は確立した理論をきちんと学ぶという意味では重要であるが，逆に言えば，調べ尽くされてそれ以上の発展性は望めない話題のようにも一見思える．しかしながら，素粒子理論では非常に基本的でありながら未解決の問題がまだまだ存在するのである．そもそもクォークやレプトンの質量に関しては，実験的にその値は決まっているものの，それらを標準模型の枠内で予言することはできないのである．フレーバー混合に関しても同様であるが，これらはいずれも自発的対称性の破れを具現化する，現在CERNのLHC実験で探索されているヒッグス粒子の湯川結合と呼ばれる相互作用に端を発した問題である．即ち，標準模型においてヒッグスは必要不可欠と思われている一方で，その性質に関しては未だに謎めいていると言うべきである．こうした観点から，現在の素粒子理論の最も重要と言っても過言ではない課題は標準模型を超える理論の構築である．湯川結合に起因するフレーバー対称性の破れとフレーバー混合に伴って生じる小林・益川模型のCP対称性の破れについても，やはりその起源は未だに完全には解明されていないように思われる．CP対称性の破れの起源を深く理解することは，宇宙における我々の存在を考える上でも重要ではあるが，素粒子物理学全体の今後の発展にとっても非常に重要な意味を持つものであることを強調したいと思う．

本書では，各章にいくつかの例題を載せた．例題のすぐ後にその解答例を記載したのは良い案かどうか定かではないが，単なる練習問題というよりは，その部分での理解に重要と思われる基本的事項を例題の形で明記したという意味合いもあるので，まず自力で解いた上で解答例も確認し理解を確かなものにしながら読み進めて頂ければと思う．素粒子論，場の量子論，ヤン・ミルズ理論を一通り学習済みの場合には，5章，あるいは6章から始めれば，本書の主題に直接入っていくことが可能である．付録においてはCP対称性の破れの起源に関する標準模型を超える理論のアイデアの一端について紹介する．なお，誤植等の訂正に関しては以下の個人ホームページ上に随時掲載予定であるので参照して頂きたい (http://www2.kobe-u.ac.jp/~lim/chosho.html).

本書の特に5章から7章の内容は神戸大学理学研究科で行った大学院での講義，他大学で行った集中講義の内容等を基に大幅に加筆したものである．8章，9章の内容に関しては，稲見武夫氏，三田一郎氏，両角卓也氏との共同研究，議論から得た知見が大いに貢献している．特に稲見氏との共著論文で得られた結果は8章で頻繁に用いさせて頂いた．ここに改めて御礼申し上げます．

また，神戸大学の大学院生の倉橋信明君，田邊和也君には草稿に関して色々と参考になる意見を頂き感謝いたします．最後に，本書の執筆をご提案頂き，常に遅れ気味の執筆状況にも関わらず辛抱強くお付き合い下さり，また貴重なご助言を下さった編集部の平勢耕介氏にこの場を借りて深く感謝いたします．

2012年4月

林　青司

目　次

第 1 章
対称性と物理学

1.1 身の周りにある対称性

2008 年度のノーベル物理学賞を授与された南部陽一郎教授の「**自発的対称性の破れ**」に関する研究，および小林誠，益川敏英両教授の「**CP 対称性の破れ**」に関する研究は，いずれも “**対称性の破れ**” をキーワードとする業績である．この教科書の目的は物理学，特に**素粒子物理学**における対称性の破れ，具体的には CP 対称性の破れと，それに関連する話題に関して解説することである．

では，そもそも対称性とは何であろうか？ 対称性は物理学に限らずとも我々の身の回りに多く存在する．我々が美しいと感じる図形は何らかの対称性を持っている場合が多い．例えば，図 1.1 のハート形や図 1.2 の円はそれぞれ線対称性，回転対称性を持っている．

この簡単な例から分かるように，対称性とは「ある種の**変換**（**対称変換**）の**下での不変性**」であると言い換えることができる．実際，図 1.1 は線分 L に関する折り返しの下で，また図 1.2 は中心 O の周りの回転の下で不変である．したがって，対称性について考えるためにはまず変換を決める必要がある．上で述べた折り返しや回転の変換は平面上，つまり 2 次元空間におけるものである

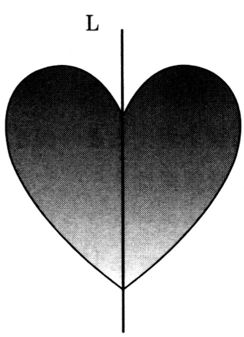


図 1.1 ハート形.

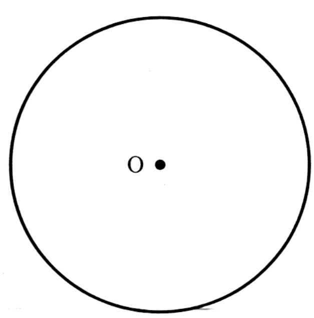


図 1.2 円形.

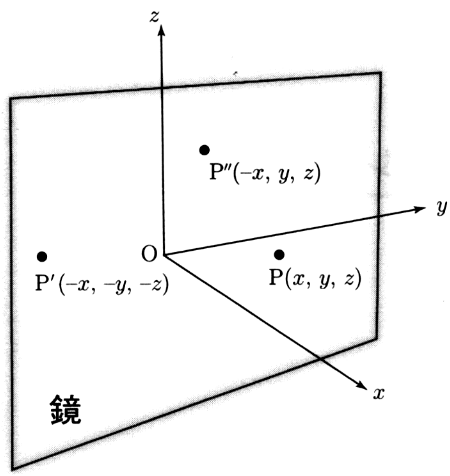


図 1.3 P 変換と鏡像変換.

が，3 次元空間においても同様な変換を考えることができる．線分に関する折り返しと似た変換として**パリティー変換**（**parity 変換**）がある．今後は頭文字をとって **P 変換**と略記したりする．P 変換の下での不変性がある場合に，**パリティー対称性**（**P 対称性**）があると言う．P 変換の定義は，ある点 P を原点に関して対称な位置の点 P′ に変換することであり（図 1.3 参照），3 次元空間の座標を用いると

$$\mathrm{P}(x,y,z) \quad \to \quad \mathrm{P}'(x',y',z'), \qquad (x',y',z') = (-x,-y,-z) \tag{1.1}$$

という変換になる．座標の間の変換は数学でいう線形変換なので行列で表すことができる：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

一つの重要な特徴は変換を表す行列の行列式が -1 であることであるが，その意味については後で議論する．P 変換と同等で，かつ直観的にはより分かりやすい変換として，鏡に移る位置に変換する「**鏡像変換**」を考えることができる．例えば原点を通り x 軸に垂直な鏡を考えると，図 1.3 の点 P の像は点 P″ の位置にできる．座標を用いると鏡像変換は

$$\mathrm{P}(x,y,z) \quad \to \quad \mathrm{P}''(x'',y'',z''), \qquad (x'',y'',z'') = (-x,y,z) \tag{1.3}$$

のように x 座標のみ符号を変える変換である．鏡像変換を表す行列は $\mathrm{diag}(-1,1,1)$ という対角行列であり，その行列式は再び -1 になる．これら 2

つの変換が同等である，というのはどういう意味であろうか？　それは，次の例題に見られるようにP変換と鏡像変換は x 軸の周りの180度の回転を通じて互いに移り変われるからである．

例題 1.1　P変換の後に x 軸の周りの180度の回転を行うと鏡像変換になることを示しなさい．

解　図1.3をじっと見て確かめるのもよいが，変換を表す行列の間の以下の関係式から明らかであろう：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

ここで，角度 π の回転を表す行列の行列式は1であり，そのために，P変換と鏡像変換の行列の行列式はいずれも -1 で同じであることに注意しよう．　□

我々がこの教科書で考えたいのは**物理学における対称性**，即ち「物理法則がある変換の下で不変か？」ということである．物理法則は3次元空間の**空間回転**，即ち x, y, z 座標軸の回転に伴うベクトルやテンソルの回転の下で不変であり（その不変性が破れている例は見つかっていない），その帰結として**角運動量の保存則**が導かれることはよく知られた事実である．つまり空間には特別な方向は無いということである．したがって，空間回転で結びつくP変換と鏡像変換の下での対称性を論じるのは同等である．

ノーベル賞の対象業績はいずれも「対称性の破れ」に関してである．対称性が破れているとは，考えている対称性が程度の差こそあれ壊れていて，対称変換の下で物理法則が不変でないことを言う．例えば図1.1のハート形の右側の部分が少しだけ欠けたとすれば，線対称性は少しだけ壊れたことになる．また，仮にハート形の右半分が完全に欠落した場合には，左半分を線分Lに関して折り返したときに変換される先の“パートナー”が存在せず，対称性は“最大限に”破れていると言うことができる．素粒子の世界でも，弱い相互作用に参加する**ニュートリノ**は“**左巻き**”の状態のみで，**右巻き**の状態が存在せず，したがってパリティー(P)対称性が最大限に破れている，といったことを後で議論することになる．

ところで，そもそも壊れてしまう，あるいは存在しない対称性を議論することに意味があるのであろうか．これはもっともな疑問で答えに窮する所がある．しかし，素粒子物理学の歴史を振り返ると，例えばP対称性は**弱い相互作用**以外の世界では完璧に成り立っているし，また弱い相互作用の世界でも，この本の主題であるCP対称性は存在するものと思われていた．その後，弱い相互

作用ではこれらの対称性が破れることが判明し，**小林・益川の理論**に代表されるように，これらを自然に説明する試みから現在の**標準模型**の構造が決定づけられたのである．つまり，何らかの意味で対称性が存在する世界が出発点にあり，それが実際には壊れていると考えることが重要な意味を持つということである．

1.2 連続的対称性と離散的対称性

2008 年度のノーベル物理学賞の 2 つの業績はいずれも対称性の破れに関するものであると述べた．しかし，実はこれらの研究が対象としている対称性には決定的な違いもある．南部教授の業績は（主として）**カイラル対称性**や**ゲージ対称性**といった**連続的対称性**に関するものであるのに対して，小林・益川両教授の業績は CP 対称性という**離散的対称性**に関するものである．図形の対称性を例にとって連続的対称性と離散的対称性の違いについて考えてみよう．図 1.2 の円は 2 次元平面上の回転対称性を持った図形であるが 3 次元空間でも球は中心の周りの回転の下で不変な図形であり**空間回転の対称性**を持っている．P 対称性とこうした空間回転の対称性を比べたときに，一見どちらも 3 次元空間の対称性で特に大きな違いがあるようには見えないが，実はこれらの間には本質的な違いが存在する．

それは，空間回転の場合には，例えば z 軸を回転軸として 30 度回転する場合を考えると，これは 0.01 度の角度の回転を 3000 回繰り返して実現することができる．このように，ほんの少しだけ変換する “微小変換” を連続的に繰り返して実現できるような変換を「連続的変換」と言い，その下での不変性を「連続的対称性」と呼ぶ．連続的対称性の対義語が「離散的対称性」であり，この場合の変換は微小変換の繰り返しでは実現できない．

すると P 対称性は離散的対称性に違いない．実際，図 1.4 に見られるように，右手を鏡に映すと，その像は左手になる．この意味で，P 対称性とは「左右の対称性」であるとも言える．一方で，微小変換においては右手が急に左手に変換されることはあり得ないはずである．

こうした直観的な議論をもう少し数学的なものに置き換えることも可能である．そもそも微小変換というのは曖昧な言い方なので，“無限小変換” の繰り返しとして連続変換を扱う．次の例題を考えてみよう．

例題 1.2 z 軸の周りの角 θ の回転を角 $\frac{\theta}{N}$ の回転を N 回繰り返したものの $N \to \infty$ の極限と考える．この空間回転を表す行列を指数関数の形で表しなさい．

解 角 $\frac{\theta}{N}$ の変換は $N \to \infty$ の極限では無限小変換となり，$\cos\frac{\theta}{N} \simeq 1$, $\sin\frac{\theta}{N} \simeq$

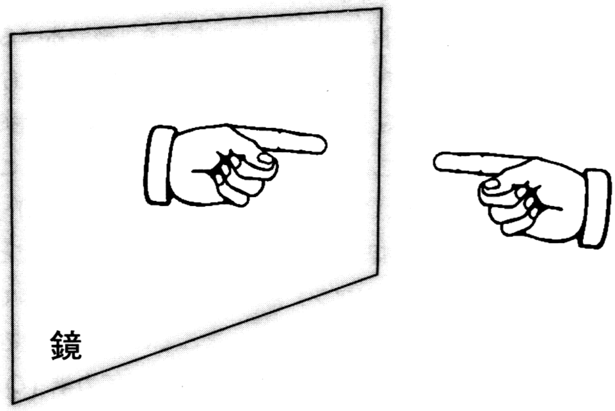


図 1.4　鏡に映した手.

$\frac{\theta}{N}$ の近似を用いることができる．すると回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{N} & -\sin\frac{\theta}{N} & 0 \\ \sin\frac{\theta}{N} & \cos\frac{\theta}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^N$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(I + \frac{i\theta}{N}T\right)^N = e^{i\theta T}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

のように指数関数の形で表される．ただし，ここで I は単位行列を表し，またエルミート行列 T は無限小変換によるベクトルの変化分を表す行列で，数学的には，連続変換の集合がなす群である連続群（リー (Lie) 群）の生成子 (generator) と呼ばれるものである． □

この例題で，無限小変換の行列 $I + \frac{i\theta}{N}T$ の行列式は $\frac{\theta}{N}$ のオーダー $\mathcal{O}(\frac{\theta}{N})$ では 1 であることに注意しよう．これは，無限小変換の行列がほとんど単位行列であることから当然の結果であるとも言える．行列式が 1 の行列をいくつ掛けても，できた行列の行列式は 1 であることから，空間回転の行列式が 1 であることは（直接計算でも確かめられるが）当然であると言える．これに対して P 変換や鏡像変換を表す行列の行列式は -1 であり，これらの変換が連続的変換ではあり得ないことを如実に表している．

1.3　古典物理学における対称性

素粒子の世界を記述する理論的な枠組みは，場の理論を量子化した「**（相対論的）場の量子論**」であるが，この節では古典物理学における対称性に関して議論

しよう．特に**マクスウェル (Maxwell)** によって集大成された**電磁気学**の持つ離散的対称性に焦点を絞って考える．後で述べるように電磁気による**電磁相互作用**は**素粒子の 4 つの相互作用**のうちの一つであり，色々な意味で素粒子の相互作用を考える上でのひな形的なものであり，物理学における対称性を議論する出発点としてふさわしいものと言える．また，ここで議論する離散的対称性である **P 対称性**，**T（time reversal，時間反転）対称性**は古典論におけるものではあるが，物理法則がある種の変換の下で不変というのは，作用積分（多くの場合はラグランジアン）が不変であることと同等であり，この事情は量子化された理論でも変わらないので，ここでの電磁場の変換性に関する議論は量子化された電磁相互作用の理論である**量子電気力学 (Quantum Electrodynamics. QED と略記)** にも受け継がれると思ってよい．ただし，もう一つの離散的対称性である **C（charge conjugation，荷電共役）対称性**に関しては量子化された理論でないと議論しにくいものである．

よく知られているように，電磁気学を集大成した**マクスウェル方程式**は光速度一定を内包し，したがって**相対性理論**と "相性がよく"，相対論でも変更を受けなかった．したがって，マクスウェル方程式は**ローレンツ変換**の下での不変性である**ローレンツ対称性**という連続的対称性を持つ．また，電磁気学の持つ重要な連続的な対称性として，後で場の量子論の枠組みで詳しく議論する「ゲージ対称性」がある．電磁気の理論は対称性の高い理論であり，こうした連続的対称性と並んで，P 対称性，T 対称性という離散的な対称性をも持つことが分かる．

既に議論したように P 変換は位置座標の符号を変える変換を行うことであるが，見方を変えると，点そのものは固定し，x, y, z **座標軸の方向を逆転（反転）**させた結果であると考えることもできる．同様に，**時間の軸を反転**させる変換である，時間反転という変換（T 変換）を考え，この T 変換の下での対称性である T 対称性を考えることもできる．直観的には，ある物理現象を鏡に映したり (P)，あるいはビデオに録画して巻き戻して見る（ただし順方向と同じ速さで）(T) ときに，生じる物理現象に "違和感" があるか無いかで対称性の有無を判断できる，とも言える．"違和感" がある場合には，物理法則からは許されない "見慣れない" 現象が生じているということであろう．例えば，古典的な水素原子の描像である，電子が陽子の周りをクーロン力による引力を受けて等速円運動している，という状況を考え，これを鏡に映してみると，図 1.5 から分かるように，電子の回転方向は逆転するが，鏡に映った運動に特に違和感は感じないであろう．実際，向心力の大きさは回転方向に依らないので，運動方程式はどちらの場合でも成立している．また，ビデオを反転させても事情は同じで違和感は無いであろう．

このように電磁気の理論は直感的にも P および T 対称性を持っていると思われるが，マクスウェル方程式がこうした対称性を持っていることを確かめて

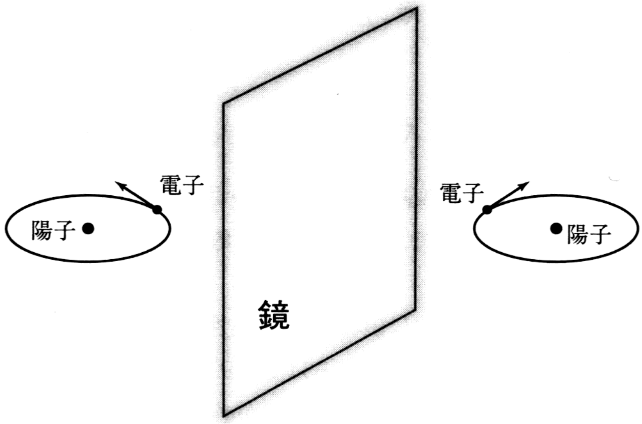


図 1.5　鏡に映した水素原子中の電子の運動.

みることにしよう．マクスウェル方程式は電磁場 $\vec{E}, \vec{B}$ および時刻と空間座標に関する偏微分 $\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}$ で記述されている．これらの微分演算子については，P, T 変換

$$\mathrm{P}: \quad \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{r}' = -\vec{r}, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{T}: \quad t \quad \rightarrow \quad t' = -t \tag{1.7}$$

の下で明らかに

$$\mathrm{P}: \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{T}: \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}' = \vec{\nabla} \tag{1.9}$$

のように変換する．では電磁場はどのように変換するであろうか．まず電場 $\vec{E}$ に関しては，例えば原点にある点電荷がある場所に作る電場を考えると，P 変換の下では位置ベクトルと共に電場は符号を変え，一方，T 変換をしても静止した電荷には影響しないので T 変換の下では電場は不変であろうと考えられる．即ち

$$\mathrm{P}: \quad \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E}' = -\vec{E}, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{T}: \quad \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E}' = \vec{E}, \tag{1.11}$$

という変換性が妥当であると思われる．実際，こうした変換の下でマクスウェル方程式は不変であることを確かめることができる．つまりベクトル量は符号を変えたりするが方程式の両辺が同じように変換するため（こうした性質を **"共変性"** と言う）方程式の形が不変であることを確認できる．クーロンの法則の微分形を例にとると

$$\text{P}: \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \to \quad (-\vec{\nabla}')\cdot(-\vec{E}') = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad \to \quad \vec{\nabla}'\cdot\vec{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}, \tag{1.12}$$

$$\text{T}: \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \to \quad \vec{\nabla}'\cdot\vec{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}, \tag{1.13}$$

のように変換され，P, T いずれの変換に関しても法則は不変であることが分かる．ここで，スカラー量である電荷密度 ρ は P, T いずれの下でも不変であるとした．

では，次に磁場 $\vec{B}$ の変換性はどうなるであろうか？ 一見，磁場も 3 次元空間のベクトルである以上，P 変換の下で符号を変えるであろうと思われる．しかし，この場合には注意が必要である．電場に関するクーロンの法則に対応するのはビオ・サバールの法則であろう：

$$\vec{B} \propto \frac{\vec{i}\times\vec{r}}{r^3}. \tag{1.14}$$

ここで $\vec{i}$ は電流密度であるが，電流の向きは P 変換の下で逆転するので P : $\vec{i} \to \vec{i}' = -\vec{i}$. これを，電流密度が**奇 (odd) パリティー**を持つと言うこともできる．すると，ビオ・サバールの法則の不変性，即ち

$$\vec{B}' \propto \frac{\vec{i}'\times\vec{r}'}{r^3} \tag{1.15}$$

を要請するのであれば，P 変換の下で磁場は符号を変えず，したがって**偶パリティー**を持つと結論せざるを得ない：

$$\text{P}: \quad \vec{B} \quad \to \quad \vec{B}' = \vec{B}. \tag{1.16}$$

このように偶パリティーを持つベクトルを一般に**軸性ベクトル (axial vector)** あるいは**擬ベクトル**と言う．これに対して "普通の" 奇パリティーを持つベクトルを**極性ベクトル**と言って区別することがある．角運動量などの 2 つの極性ベクトルの外積で表されるベクトルは軸性ベクトルとなる．

このように電磁場の P 変換の下での変換性を決めると，マクスウェル方程式の 4 つの関係式はすべて P 対称性を持つことが分かる．以下の例題で確かめてみよう．

例題 1.3 P 変換の下でマクスウェル方程式は不変であることを示しなさい．

解 マクスウェル方程式の 4 つの関係式のうちで，クーロンの法則については既に (1.12) で示しているので，ここではアンペール・マクスウェルの法則

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{i} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{1.17}$$

をとり上げる．残る 2 つについては読者に演習問題としてゆだねる．(1.17) を $\vec{E}' = -\vec{E}$, $\vec{B}' = \vec{B}$, $\vec{i}' = -\vec{i}$, $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$ の関係を用いて，P 変換後の物理量で

書き直すと，

$$-\vec{\nabla}' \times \vec{B}' = -\vec{i}' + \epsilon_0 \frac{\partial(-\vec{E}')}{\partial t} \tag{1.18}$$

となり，確かに変換後も方程式の形は変わらないことが確かめられる． □

磁場の T 変換の下での変換性はどうなるであろうか．ビオ・サバールの法則 (1.14) を用いて考えると，$\vec{i}$ が符号を変えることから，磁場も符号を変えるべきである：

$$\mathrm{T}: \quad \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{B}' = -\vec{B}. \tag{1.19}$$

実際，このように変換性を決めるとマクスウェル方程式の 4 つの関係式はすべて T 変換の下でも不変であることを示すことができる．クーロンの法則については既に (1.13) で示しているが，残る 3 つについても各自確かめて頂きたい．

第 2 章
素粒子の弱い相互作用における離散的対称性の破れ

2.1 素粒子と，その間に働く 4 つの相互作用

まず，この章以降では相対論と量子論の両方が重要となる素粒子の世界を記述するのに便利な “**自然単位系**” ($c = \hbar = 1$) を用いるので注意されたい.

素粒子物理学の目的は，宇宙に存在するすべての物質を構成する最も基本的な粒子である**素粒子**にはどのようなものがあり，それらの性質はどのようなものであるか，また素粒子の間にはどのような力が働いてどのような現象が起こるか，について解明することである．正確には粒子間に働く力は常に作用・反作用の法則に従い相互に作用するので「**相互作用 (interaction)**」と呼ばれる.

実際には「最も基本的」とは言っても，人智に限界がある限り，ある時代に素粒子だと思われていても，より高いエネルギー・運動量でよりミクロな世界を探るとより基本的な粒子が見つかり，今まで素粒子だと思っていた粒子はこうしたより基本的な粒子に分解される，ということが起こり得る．つまり素粒子は時代により変化し得るのである．実際，物の性質を示す最小単位である分子は原子の集まりで，原子も中心の原子核とその周りを回る電子の束縛状態であり，更に原子核は陽子と中性子からできているが，それまで素粒子だと思われていた陽子，中性子も 1964 年にゲルマン・ツバイク (Gell-Mann, Zweig) によって**クォーク (quark)** というスピンが $\frac{1}{2}$ のフェルミオンが導入されるに至って，u, d という 2 種類のクォークが 3 個結合した束縛状態であるとの認識に徐々に変わって行った．これに対して原子核の周りを回る電子 e^- は今でも素粒子であると思われていて，電子型ニュートリノ ν_e とペアで**レプトン**（**lepton. 軽粒子という意味**）と総称されている．こうして現在ではすべての物質を構成する素粒子はクォークとレプトンであると思われているが，後の「**素粒子の標準模型**」において述べるように，素粒子には “**世代**” というものがあり，通常の原子を構成する，u, d クォークや電子（それと電子型ニュートリノ）は実は 3 世代あるクォーク・レプトンのうちで最も “軽い” （質量の小さい）第 1 世代に

相当することが分かっている．こうした**3世代の存在**を理論的に予言したのは小林・益川両教授であり，それは，正にこのテキストの主題である「**CP 対称性の破れ**」を説明するために導入されたのであった．

素粒子の間に働く相互作用は**電磁相互作用**，**強い相互作用**，**弱い相互作用**，**重力**の4種類である．普段の生活で我々に馴染み深いのは電磁相互作用と重力であろう．これらの特徴はクーロンの法則と万有引力の法則の類似性に見られるように2粒子間の距離の2乗に逆比例する遠距離力である，ということである．このために，これらの力についてはマクロな世界で昔から認識されていた．なお，日常生活では重力はとても重要な力であるが，素粒子の世界では重力は他の3つの相互作用に比べて極端に弱い相互作用であることが分かる．しかし，マクロの世界では，物質が電気的に中性なので電磁相互作用よりむしろ重力相互作用のほうが重要になるのである．こうした事情で，素粒子の標準模型は重力を除く3つの相互作用を記述する理論である.「標準模型」の所で議論するように，これらの3つの相互作用はいずれも，**局所ゲージ対称性 (local gauge symmetry)** を理論に課すことで相互作用を自然に導く「**ゲージ原理**」によって自然に生じる．具体的には，局所ゲージ対称性を実現するために電磁相互作用，強い相互作用，弱い相互作用にはそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&\text{電磁相互作用：光子}\ (\gamma),\\
&\text{強い相互作用：グルーオン}\ (g),\\
&\text{弱い相互作用：}W^{+}, W^{-}, Z
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

という相互作用を媒介する粒子である「**ゲージボソン**」が導入され，これらがクォークやレプトンの間で交換（やりとり）されることでクォーク，レプトンの間の相互作用が生じる．このように相互作用はそれを媒介する粒子の交換（“キャッチボール”）により生じる，という考え方は湯川による核力を媒介する**パイ中間子**という考え方の延長上にあると言える．これらのゲージボソン $\gamma, g, W^{+}, W^{-}, Z$ は物質を構成する素粒子とは言えないが，素粒子の仲間に含めることはできる．光子は当然光速で伝搬する必要があるので質量を持たず，電磁相互作用は光速で遠方まで伝わることになる．

これに対して，強い相互作用と弱い相互作用は，原子核の大きさ程度あるいはそれ以下のミクロの世界でしか働かない短距離力であり，そのため発見が遅れたとも言える．“強い”，“弱い” というのは電磁相互作用に比べて強い，弱いという意味である．例えばヘリウムの原子核 ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ は陽子2個，中性子2個の束縛状態であるが，陽子2個の間に電気的な斥力が働くのになぜ原子核がバラバラにならないかというと，電磁気力より強い引力である「**核力**」が核子（陽子，中性子）の間に働いているからである．この核力を引き起こす相互作用が強い相互作用である．湯川の時代には核力は**パイ中間子の交換**で生じると考えられていたが，現在の考え方によれば，強い相互作用の原因はグルーオン（のり付

け粒子という意味）というゲージボソンの交換にあると考えられている．

一方，不安定な放射性原子核がベータ線（その正体は電子）を放出して崩壊する **β 崩壊**を引き起こす相互作用が弱い相互作用である．電磁相互作用の場合と違い，弱い相互作用は当初はゲージボソンの交換によるというのではなく，時空の一点で粒子が直接接触する形で伝わると思われていた（**接触相互作用**）．しかし，現在の標準模型における理解では，弱い相互作用も例外ではなく W^+, W^-, Z といったゲージボソンの交換により伝わるものと理解されている．直感的には，これらのゲージボソンが核子の質量等に比べて非常に重いためにほとんど伝播できず，そのために弱い相互作用の到達距離がほぼゼロに見えていたということになる．

強い相互作用について一つコメントしておこう．弱い相互作用の場合と違い，強い相互作用を媒介するゲージボソンであるグルーオンは実は光子と同様に質量を持たないと思われている．すると電磁相互作用の場合と同様に強い相互作用も一見長距離力になりそうである．では何故強い相互作用は短距離力なのであろうか？　電磁相互作用との決定的な違いは，力の起源である局所ゲージ対称性が $SU(3)$ という数学でいう**非可換なリー群（非可換群）**である，という事実である．一方，電磁相互作用は $U(1)$ というゲージ対称性を持つが，$U(1)$ は**可換群**である．非可換群に基づいたゲージ対称性を持った理論の顕著な特徴として，エネルギーが上がるにつれて相互作用がだんだんと弱くなる（**漸近自由性 (asymptotic freedom)**）という性質がある．逆に言えば，エネルギーが小さくなると相互作用の強さが非常に大きくなりグルーオンの交換によって束縛されているクォークは小さな領域に閉じ込められる．こうした現象を "**幽閉 (confinement)**" と言う．こうして結果的にグルーオン交換による強い相互作用が短距離力になると考えられている．

2.2　弱い相互作用における P 対称性の破れ

素粒子の世界では重力は（正確には通常到達可能なエネルギー領域では）非常に弱くとりあえず無視するとして，残る電磁，強，弱の 3 つの相互作用のうちで，電磁相互作用，強い相互作用においては連続的な対称性であるゲージ対称性は破れず，その結果，上で述べたように光子，グル―オンが共に質量を持たない，という共通する性質がある．実は，これらの相互作用においては P, T といった離散的対称性についても破れることは無く，この点においても両者は共通している．更には，これらの相互作用においては，"フレーバー" が保存される，という著しい特徴もある．"フレーバー" というのはあまり物理用語的ではないが，$u, d, c, s, \ldots$ 等の質量の違う個々のクォークを区別する概念で，それぞれのクォークは違うフレーバーを持っているという言い方をする．その意味で，フレーバーというのはクォークの持つ一種の属性であると言ってよい．こ

こでは詳しく議論しないが，クォークは更に**カラー**という他の属性も持っていると思われている．つまり，例えば u クォークはそれの持つ 3 つのカラー（赤，青，緑）により更に 3 つのクォーク，u_r，u_b，u_g に分かれるのである．ちょうど電荷が電磁相互作用を引き起こす源 (source) であるように，強い相互作用はカラーを source として引き起こされると考えられている．電磁相互作用が $U(1)$ というリー群のゲージ対称性に基づくのに対して強い相互作用が $SU(3)$ というゲージ対称性に基づくのは，直観的には電荷は 1 種類しかないのに対して，カラーは 3 種類あるからである．なお，クォークがカラーという属性を持つべきであるということを最初に指摘したのは南部教授である．

これに対して，弱い相互作用においては，これを担うゲージボソン W, Z が質量を持つことから,「標準模型」の所で議論するように弱い相互作用に関係する部分のゲージ対称性が（自発的に）破れることになるが，それだけではなく P 対称性のような離散的対称性も破れていることが分かっている．つまりこの相互作用で引き起こされる現象に関しては鏡に映した現象は実際には起こり得ず，鏡に映すと物理法則が変わってしまうということになる．これはそれまでの常識からすると考え難いことであり，発見当時の人々には驚きを持って迎えられた．実は小林・益川のノーベル賞の対象業績である CP 対称性の破れも，この弱い相互作用の世界で起きる別の離散的対称性の破れであるが，これは後ほど議論するとして，まずは典型的な離散的対称性の破れであるパリティー (P) 対称性の破れについての話から始めよう．

まず P 対称性があると仮定すると，P 変換の下で不変な素粒子の状態を考えることは意味のあることである．しかし，例えば等速直線運動している素粒子の状態を考えると P 変換で運動量は符号を変えるので P 不変な状態にはならない．単純に考えると静止した状態を考えれば P 不変な状態と言えそうであるが，量子力学的には 2 通りの場合があり得る．即ち，素粒子を表す波動関数 ψ（正確には量子化された場）が P 変換の固有状態になれば良いのであり，固有値（P 固有値と言う）は，P 変換を 2 回行うと恒等変換（変換しないのと同義）になるので ± 1 のいずれかをとり得ることになる．これは量子力学で勉強する調和振動子の波動関数に関する議論と同様である．こうした静止した素粒子の持つ P 固有値 ± 1 は各素粒子が固有に持つものと言え,「**固有パリティー**」と呼ばれる．もしも考えている理論が P 対称性を持った理論であれば，色々な素粒子の相互作用による過程（化学反応のように “素粒子反応” と言ったりする．ただし，化学反応とは違って粒子の生成や消滅が起こり得るが）において，各粒子の **P 固有値の積（偶奇性）** は反応の前後で変わらず保存されることになる．これは，いくつかの粒子が共存する場合に，その状態はそれぞれの粒子の波動関数の積で表されることからも容易に理解できる．ただし，複数の粒子が存在すると，少し話は複雑になる．例えば 2 個の粒子が重心の周りで運動しているとすると，仮に重心が静止していても相対運動を表す量子力学的波動関数もパ

リティー変換の下で固有値 $(-1)^l$ (l : 相対運動の角運動量の大きさ) を持つ．したがって保存するのは $(-1)^l P_1 P_2$ ($P_{1,2}$: 2 つの粒子の固有パリティー) という積である．

1950 年代に素粒子物理学者を悩ませたパズルがあった．その頃の素粒子物理学の状況を少し振り返ってみよう．当時は現在のような人工的な高エネルギーの粒子加速器を用いた実験は実現しておらず，新粒子の発見は宇宙線が大気とぶつかって新粒子を生成する可能性を用いて行われていた．宇宙線とは宇宙のあらゆる方向から地球に降り注ぐ粒子束のことで，その正体は主として陽子であるが，そのエネルギーはかなり高く（10^{10} GeV に達するものもある），天然の高エネルギー加速器になっているとも言える．

湯川が 1935 年に核力を媒介する粒子として予言したパイ中間子（異なる電荷を持つ π^+, π^0, π^- の 3 種類がある）がパウエル (C.F. Powell) らによって宇宙線中で発見された 1947 年に，ロチェスター・バトラー (G.D. Rochester, C.C. Butler) により，やはり宇宙線中で今までの粒子と同定することのできない新粒子が発見された．新粒子の仲間は **"奇妙な粒子"** と呼ばれ，**奇妙さ（ストレンジネス, strangeness）**という**（加算的）量子数**を付与された．現代風に言えば，**ストレンジ・クォーク s**，およびその**反粒子 $\bar{s}$**（後で議論するように各素粒子には，質量が全く同じで電荷等の加算的量子数が逆符号の，**反粒子**が存在することが分かっている）を含んだハドロンである．ストレンジネスとは，ストレンジクォーク，およびその反クォークのみが持つ量子数であるが，歴史的事情で s クォークに -1 が，$\bar{s}$ に $+1$ が付与される．ストレンジネスはストレンジ・クォークのフレーバーを表す属性と言える．ストレンジネスの概念を導入したのは中野薫夫，西島和彦，ゲルマンであった．彼らはハドロンの性質を分析して，各ハドロンの電荷 Q，**アイソスピン**（陽子，中性子あるいは u, d クォークをそれぞれ "アイソスピン" が上向き，下向きの状態と見なすような，スピンからの類推で名づけられた量子数)，ストレンジネス S，また**バリオン数 B**（陽子，中性子のようなバリオン，およびその反粒子のみがそれぞれ $+1$, -1 を持つ，バリオンを特徴づける量子数）の間に成り立つ「**中野・西島・ゲルマンの法則**」と呼ばれる関係式

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2}, \qquad (I_3 : \text{アイソスピンの第 3 成分}) \tag{2.2}$$

を発見した．あるいは，$B+S$ を **"ハイパーチャージ"** Y と呼ぶことにすると，

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \tag{2.3}$$

とも書ける．この法則は，その後のゲルマンとツバイクにより提唱されたクォーク模型 (ハドロンを $SU(3)$ 対称性を用いて分類し，これらを構成する基本的な素粒子としてクォークを導入した理論) 成立の大きなヒントとなった．具体的に

は，(2.3) はその背後に存在する $SU(3)$ という群の対称性を示唆する重要な関係式であったのである．クォーク模型の提唱当時は，核子や π 中間子を構成する u, d クォークおよび奇妙な粒子に含まれる s クォークという 3 個のクォークのみが $SU(3)$ の基本表現として導入された．しかしその後，原康夫，牧二郎によって 4 個あったレプトンとの対応から，またグラショウ・イリオプウロス・マイアニ (Glashow, Illiopoulos, Maiani) によって奇妙な粒子である **K 中間子**のある種の崩壊過程（**フレーバーの変わる中性カレント (Flavor Changing Neutral Current，FCNC) 過程**と呼ばれる．後述）の理論的解析から，それぞれ第 4 のクォークである**チャームクォーク c** の導入が提唱された．更にはよく知られているように小林誠，益川敏英によって**第 3 世代のトップクォーク t，ボトムクォーク b** を含めた計 6 個のクォーク，即ち **3 世代のクォーク**の存在を予言する**小林・益川模型**が提唱され，その予言の正しさはその後実験的にも検証されて標準模型の最終的な確立に至ったのである．

パズルの話に戻ろう．最初にロチェスターらによって発見された奇妙な粒子は，ストレンジネスを持つ中間子である **K 中間子**で $K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0$ の 4 種類ある．先に述べた 1950 年代に素粒子物理学者を悩ませたパズルというのは，この K 中間子に関するものである．素粒子の世界では粒子の生成と消滅が普通に起きるが（それを記述するのが場の理論を量子化した「**場の量子論**」である），ストレンジネスを持った荷電中間子で 2 個のパイ中間子に崩壊するものと 3 個のパイ中間子に崩壊するものが存在した．これらは当時違う粒子だと考えられ，それぞれ $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\tau}$ と名づけられた．実は θ，τ の質量はほぼ同じであるように見えたのだが，それでも違う粒子だと考えられた理由は，これらの粒子が異なる固有パリティー，それぞれ 1 および -1 を持つと考えられたからである．この崩壊は，ストレンジネスを持った中間子が，ストレンジネスを持たない π に崩壊するので，素粒子であるクォークのレベルで考えると，崩壊の際に s クォークが消滅していることになり，明らかにフレーバー（ストレンジネス）が変化している．したがって，フレーバーを保存する電磁相互作用や強い相互作用では起こり得ない現象である．つまり，この崩壊は弱い相互作用でのみ起きる．当時パイ中間子の固有パリティーは -1 だということがパリティーを保存する強い相互作用，電磁相互作用による反応の解析から分かっていた．よって，2 個のパイ中間子に崩壊したときの “終状態” のパリティー固有値は，先に議論したように $(-1)^2(-1)^l$ で与えられる．ここで，“始状態” の中間子も終状態の π もスピンがゼロの粒子（**スカラー粒子**，正確には固有パリティーが -1 なので **“擬スカラー” 粒子**）なので，崩壊前後の角運動量は，崩壊する “親” の粒子の静止系においてはいずれもゼロである．よって角運動量保存則より $l = 0$ となり終状態の P 固有値は 1（偶パリティー）であることが分かる．一方，同様な解析から 3 個のパイ中間子の終状態の P 固有値は -1 の奇パリティーの状態をとることが分かる（これは少し説明を要するが）．

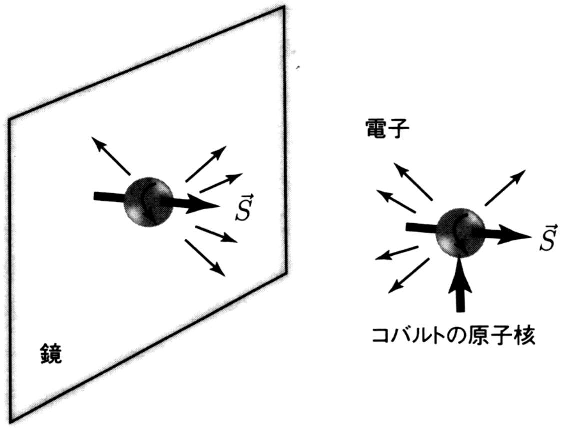


図 2.1　コバルト原子核の β 崩壊.

当時は P 対称性は当然破れないものと思われていた．それは P 対称性も回転対称性と同様な 3 次元空間の対称性であり，また左右の対称性が破れるというのは考え難いことであったからである．実際，電磁相互作用，強い相互作用により引き起こされる現象においては P 対称性は当然のように成り立っていた．弱い相互作用でも P 対称性があるとすると，パリティー固有値は保存されるはずなので，この 2 個，および 3 個のパイ中間子に崩壊する親の粒子である θ, τ はそれぞれ $1, -1$ という異なる P 固有値を持ち，したがって別の粒子であると考えられたのである．一方でこれらの粒子の質量がほぼ同じであることも事実であって，大きなパズルとされた．この **“τ–θ” パズル**を解決したのがリー (T.D. Lee) とヤン (C.N. Yang) であった．彼らは弱い相互作用の実験データからは実は P 対称性が存在するとは結論づけられず P 対称性は破れ得る，と主張した．P 対称性が破れているのであれば，親の粒子 τ, θ を別の粒子であると結論づけた論理は崩れ，質量がほぼ同じであることから同一の粒子であると考えるほうが自然である．現在では τ, θ は K 中間子と呼ばれる同一の粒子であると理解されている．

リーとヤンの「**パリティー対称性の破れ**」の主張は衝撃をもって迎えられ，すぐに弱い相互作用における P 対称性の破れを実証しようという実験が行われた．最初に行われた有名な実験は，ウー (C.S. Wu) のグループによるコバルト 60 の原子核のベータ崩壊 Co $\rightarrow$ Ni $+e^- + \bar{\nu}_e$ に関する実験である．ここで $\bar{\nu}_e$ は電子型ニュートリノの “反粒子” である（反粒子に関しては後で議論する）．

コバルト原子核はスピンを持っている．スピンとは粗っぽく言うと粒子のいわば自転による角運動量（スピン角運動量）と思えばよいが，正確には量子力学の角運動量の一般的性質を用いてきちんと議論すべきである．スピン回転（“自転”）の様子を表すベクトルとしてスピン角運動量 $\vec{S}$ を考えると便利である．その方向は，スピン回転の方向に右ネジを回したときにネジの進む方向である．

ウーの実験ではコバルトの $\vec{S}$ を一定方向に揃え，放出される電子（ベータ線）の方向が $\vec{S}$ に対して相対的にどの方向に飛び出すかを測定した．その結果 $\vec{S}$ とは逆向きの方向に多く電子が放出されることが分かった．この事実は P 対称性の破れを明確に示している．実際，図 2.1 に示すように鏡に映した世界では $\vec{S}$ は変わらないが，電子の運動量の方向は逆転する．すると，鏡に映した世界では $\vec{S}$ と同じ向きに電子が多く放出されることになり，物理法則が映す前の世界とは変わってしまっていることになる．別の言い方をすると，もし P 対称性があると，鏡に映した世界での現象も映す前と全く同等に起きるはずであり，$\vec{S}$ と同じ向き，逆向き，どちらにも電子は同様に放出されるべきであるが，現実には逆方向のみに多く電子が放出されていて P 対称性が破れていると結論せざるを得ないのである．ここで注意したいのは，こうした放出される方向の "非対称性" が大きいことである．もし P 対称性がほぼ成り立っていてその破れがわずかであれば，電子は $\vec{S}$ に対して前後方ほぼ同様に放出されるであろうから，この事実は弱い相互作用における P 対称性が大きく破れていることを示唆している．実際，弱い相互作用では **P 対称性が "最大限 (maximal)" に破れていること**が分かっている（図形の例で言えばハート形のクッキーの右半分が完全にネズミにかじられてしまったようなもの）．

2.3 弱い相互作用における C 対称性の破れ

弱い相互作用では P 対称性のみならず **C 対称性**という別の離散的対称性も破れていることが分かっている．では C 対称性とはどんな対称性であろうか．既に事実としては述べているが，各素粒子には，質量や寿命（安定でなく崩壊する場合）が全く同じであるが，電荷，アイソスピン，ストレンジネス等の量子数（正確には加算的量子数）の符号が逆の **"反粒子" (anti-particle)** が存在する．電子 e^- の反粒子は正電荷を持つ **"陽電子"** で e^+ と書く．それ以外の場合は素粒子の名前にバーを付けて表す．u クォークの反粒子は $\bar{u}$ クォーク，等である．また素粒子ではないが，陽子 p の反粒子は反陽子と呼ばれ $\bar{p}$ で表される．中性子 n は電気的に中性ではあるが反粒子 $\bar{n}$ が存在する．それはアイソスピンの第 3 成分が $-\frac{1}{2}$ でゼロではないからである．あるいは，クォークレベルで考えると $\bar{n}$ は $\bar{u}$ 1 個と $\bar{d}$ 2 個の束縛状態であり，u, d クォークの束縛状態である n とは明らかに区別できる．

ただし，例外的に，電荷やアイソスピンの第 3 成分等の加算的量子数がゼロで，粒子・反粒子の区別のない素粒子も存在する（$-0 = 0$ である）．その典型的な例は電磁相互作用を媒介する光子 γ や弱い相互作用を媒介する中性のゲージボソン Z^0 である．なお，素粒子を記述する理論体系である「場の量子論」においては，こうした粒子・反粒子の区別のない粒子は**実数の場（実場）**で表

されるのに対し，区別のある粒子は**複素数の場（複素場）**で表される．これは，次に述べるC変換が複素共役の変換を含むことから容易に想像がつくことである（実数は複素共役をとっても不変である）．

C変換とは粒子と反粒子を入れ換える変換である：

$$\mathrm{C}: \quad 粒子 \quad \leftrightarrow \quad 反粒子. \tag{2.4}$$

歴史的には，最初に陽電子の存在をディラック (Dirac) が予言したこともあり，こうした変換は電荷を変える変換という意味で **"荷電共役 (charge conjugation)" 変換**と呼ばれた．C変換という言い方はこの英語の頭文字から来ている．ただし，先に述べた中性子や中性 K 中間子 K^0 のように，電気的に中性でもその反粒子 $\bar{n}$, $\bar{K}^0$ が存在するものもあるので，この言い方は多少語弊があるが習慣的に使われている．

C対称性があれば，粒子と反粒子は全く同じ物理法則に従うはずである．実際，電磁相互作用，強い相互作用ではC対称性は破れない．電磁相互作用を例にとれば，原子をC変換して得られる反陽子 $\bar{p}$ と陽電子 e^+ の束縛状態である "反原子" を作ったとすると，これは原子と同様に存在できる．反陽子と陽電子の間には，陽子と電子の間に働くのと全く同じクーロン力による引力が働き，円運動が可能である（ここでは古典物理的に考えている）．しかし，反陽子の作る電場そのものは，陽子 → 反陽子の変換により符号を変えるであろう．同様に磁場の符号も逆転するはずである．つまり，光子は "奇" のC変換の固有値 -1 を持つ：

$$\mathrm{C}: \quad A_\mu \quad \to \quad -A_\mu. \tag{2.5}$$

ここで，A_μ は光子を表す場である4元電磁ポテンシャルである．すると，電荷密度 ρ や電流密度 $\vec{i}$，したがって4元電磁カレントも

$$\mathrm{C}: \quad j^\mu \quad \to \quad -j^\mu, \tag{2.6}$$

のように変換することを考慮すると，明らかにマクスウェル方程式はC変換の下で不変である．こうして，電磁相互作用（および強い相互作用）はC, P, Tすべての離散的対称性を持っていることになる．

ところで，ディラックはそもそも何故反粒子という発想に至ったのであろうか？　それは，電子に関する相対論的量子力学における運動方程式である**ディラック方程式**を発見した際に起きた問題に起因する．ディラック方程式はここでは書き下さないが，それから導かれる**クライン・ゴルドン方程式**

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta - m^2\right)\psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.7}$$

に注目しよう．ここで ψ_i はディラック方程式に現れる4元ベクトルの波動

関数（**スピノール**と呼ばれる．スピンが up か down か，粒子か反粒子かで $2 \times 2 = 4$ 個の自由度が存在する）の各成分を表す．また m は電子の質量である．(2.7) はディラック方程式からも導出されるが，量子力学の対応原理からすれば $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$（p^μ : 4 元運動量）というアインシュタインの関係式，あるいは **"on-shell (on-mass-shell)" 条件**に他ならず，当然満たされるべき微分方程式であると言える．

問題は，このクライン·ゴルドン方程式の平面波解として $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ ($p = |\vec{p}|$) の 2 つの場合が存在し，通常の正エネルギーの解の他に $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$ の負エネルギー解 $\psi_i \propto e^{i(\sqrt{p^2+m^2}t+\vec{p}\cdot\vec{r})}$ がどうしても出てきてしまう，という点である．つまり電子の（正確には外部から力を受けない "自由粒子" の場合の）エネルギー E は $-m < E < m$ の領域を除いて $-\infty$ から $+\infty$ まで自由にとれることになる．$m \leq E \leq \infty$ の領域は，相対性理論から普通に期待されるもので特に問題はない (相対論によれば静止していても $E = m$ のエネルギーを持つのでエネルギーは一般にこれ以上になる)．問題は $E \leq -m$ の領域である．量子力学の重要な成果は，原子において電子のエネルギーが量子化され基底状態が存在するために，光子を放出してエネルギーが連続的にどこまでも下がることを禁止し原子の安定性を説明することが可能であることである．しかし，もし負エネルギーの状態が許されるのであれば電子のエネルギーに下限が無くなり，再び原子の安定性は保証できなくなる．ディラックが悩んだ末に導入した考え方は "**ディラックの海**" と呼ばれるものである．ここで重要な役割を演じるのが量子力学で学ぶ「**パウリの排他律**」である．即ち，電子のようなフェルミ粒子に関しては,（スピンの自由度まで含め）同じ量子力学的状態を占有できる電子の数は 1 個までである，という規則である．ディラックは，負エネルギーが許される以上，エネルギー最低の状態は，ちょうど海が海水で満たされるように，負エネルギーの状態のすべてを電子が占めている状態であろうから，これを基底状態，即ち物理用語でいう「**真空 (vacuum)**」の状態と見なすしかないと考えた．排他律のために，可能なすべての負エネルギー状態を満たしてしまうと，これ以上負エネルギー状態に電子を置くことはできないから，これよりエネルギーが下がることはないのである．

もしも電子の総数を変えずに真空より高いエネルギーの状態を実現しようとすると，一番エネルギーが少なくて済む場合としては，ほとんど $-m$ のエネルギーの電子をほとんど m のエネルギーの状態に上げてやることである．このとき必要なエネルギーは，ほぼ $2m$ である．結果的にディラックの海に 1 つ "**空孔 (hole)**" ができると共に正エネルギー状態にも 1 つ電子が現れる（図 2.2 参照）．

負エネルギーの状態が欠落するということは $-m$ のエネルギー，負の電荷 $(-e)$ を持った状態が無くなるので，その分だけ真空に比べてエネルギーや電荷が増加したことになり，したがって空孔ができるということは m のエネルギーを持ち，

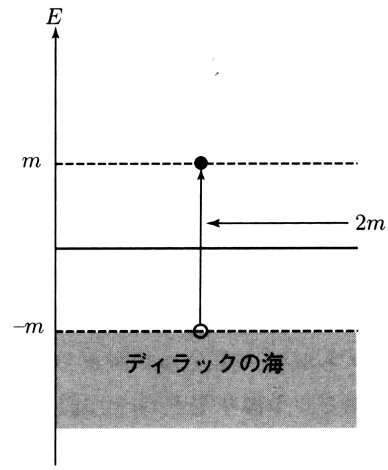


図 2.2　真空からの対生成.

正の電荷 $+e$ を持った粒子が生成されるのと同等になる．更に，$(-\sqrt{p^2+m^2}, \vec{p})$ の 4 元運動量を持つ負エネルギー状態が欠落すると $(\sqrt{p^2+m^2}, -\vec{p})$ の 4 元運動量を持つ粒子が生成されるが，この 4 元運動量は $p^\mu p_\mu = m^2$ を満たすので，この正電荷の粒子も電子と同じ質量を持つはずである．こうしてディラックは，この粒子を陽電子と見なしたのである．この考え方を**空孔 (hole) 理論**と言う．結局，真空状態に $2m$ のエネルギーを与えることで，陽電子 e^+（空孔）と電子 e^- を 1 つずつ，ほとんど静止した状態で "**対生成**" できることが分かる．逆に，ほぼ止まった状態の電子，陽電子が出会うと，エネルギー $2m$ を放出して "**対消滅**" する．これらは，素粒子の世界で起きる "生成・消滅" の典型的な例である．これを用いると，電子と陽電子を逆向きの速度で同じエネルギー E まで加速して正面衝突させたとすると，$2E > 2M$ $(E > M)$ の条件を満たすような質量 M の粒子と反粒子の対生成が可能である．実際には電子と陽電子が対消滅して生成されるエネルギーは何らかの粒子によって担われるので，加速器実験で起きている典型的な過程は

$$e^+ + e^- \quad \to \quad \gamma^* \quad \to \quad \mu + \bar{\mu} \tag{2.8}$$

のようなものである．この場合には対消滅後に光子が生成されてエネルギーは光子 γ^* によって担われ，その光子がエネルギーを供給してミューオンと反ミューオンの対生成が起きている．しかし，こうして生成される光子 γ^* はアインシュタインの関係式を満たし実際に存在することのできる "**実状態**" でなく，量子論特有のエネルギーの不確定性のために瞬時のみ存在できる "**仮想状態 (virtual state)**" である．次の例題を参照されたい．

例題 2.1　電子と陽電子の正面衝突により生成される光子は仮想状態にならざるを得ないことを示しなさい．

解　電子と陽電子が，それぞれ $\vec{p}$, $-\vec{p}$ の運動量をもって正面衝突したとする．エネルギーはいずれも $\sqrt{p^2+m^2}$ で同じであるので，生じる光子の4元運動量は，エネルギー・運動量保存則より $(p_\gamma)^\mu=(2\sqrt{p^2+m^2},\vec{0})$ となり，明らかに質量0の粒子が満たすべきアインシュタインの関係式 $(p_\gamma)^\mu(p_\gamma)_\mu=0$ を満たさない．よって生成された光子は実状態ではあり得ず仮想状態にならざるを得ない．　□

こうしたディラックの海，空孔理論の考え方はとても面白いが，パウリの排他律に依拠しているので整数スピンを持つボソンの場合には，そのままでは適用できないという問題が残る．排他律が働かず負エネルギー状態にいくらでもボソンを入れられるとなるとエネルギーの下限が無くなり真空が定義できなくなりそうである．この困難は**場の量子論**の枠内で解決されると思われている．場の量子論においては，粒子・反粒子に関する消滅演算子をそれぞれ a, b として，真空状態 $|0\rangle$ は

$$a|0\rangle=b|0\rangle=0, \tag{2.9}$$

を満たす状態として定義される．真空では粒子も反粒子も存在せず，それらを消滅させることはできないことを言っていて，もっともらしい条件であるが，空孔理論の立場では反粒子の消滅演算子 b は負エネルギーの粒子の生成演算子であったと見なすことができ（例題2.2参照），したがって $b|0\rangle=0$ は，負エネルギー状態がいっぱいでもうこれ以上粒子を詰め込めない，という条件と同等とも見なせる．つまりボソンに対してもパウリの排他律に対応する条件を課しているように見え，天下り的な感じがしなくもないが，とにかくこれを課すことで真空状態を矛盾なく定義することができるようになる．

例題 2.2　反粒子の消滅演算子 b は元々負エネルギーの粒子の生成演算子であったと見なすことができることを説明しなさい．

解　簡単のために，一般的な**複素スカラー場** $\phi(x^\mu)$ について考えよう．これを平面波展開（フーリエ積分）の形に書くと

$$\phi(x^\mu)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left\{a^{(+)}(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}+a^{(-)}(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu}\right\} \tag{2.10}$$

となる．ここで，スカラー場は**クライン・ゴルドン方程式**を満たし，したがってon-shell条件 $p^\mu p_\mu-m^2=0$（m：スカラー粒子の質量）より $p^0=\omega_p\equiv\sqrt{p^2+m^2}$ を満たしている．また，$a^{(+)}$, $a^{(-)}$ はそれぞれ正エネルギー，負エネルギーの状態の消滅演算子を表す．ディラックの空孔理論との類推で考えれば，負エネルギーの状態の消滅は反粒子の生成と同等と考えられるので，粒子と区別して反粒子の消滅演算子を b で表すことにすると

$$b(\vec{p})^\dagger = a^{(-)}(\vec{p}) \qquad (a(\vec{p}) = a^{(+)}(\vec{p})) \tag{2.11}$$

とおくことができる（本来 $b(-\vec{p})^\dagger = a^{(-)}(\vec{p})$ と見なすべきであるが $\vec{p}$ の符号の反転は運動量積分の下では無視できる）．即ち，

$$\phi(x^\mu) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + b(\vec{p})^\dagger e^{ip_\mu x^\mu} \right\} \tag{2.12}$$

と書ける．これから $b(\vec{p}) = a^{(-)}(\vec{p})^\dagger$ であり反粒子の消滅演算子は元々負エネルギーの粒子の生成演算子であったと見なすことができる． □

重要な事実として，C 変換は，粒子を表す波動関数や場に関する複素共役（量子化された場については正確にはエルミート共役）に相当する，ということである．複素共役は complex conjugation であり，荷電共役 charge conjugation と似ていることも面白い．実際，(2.12) において $\phi \to \phi^\dagger$ の変換を行うと，この変換は明らかに $a(\vec{p}) \leftrightarrow b(\vec{p})$ という変換と同等であることが分かるので，粒子と反粒子を入れ替える変換になっている．つまり

$$\mathrm{C}: \quad \phi(x^\mu) \quad \to \quad \phi(x^\mu)^\dagger. \tag{2.13}$$

これから，実場の場合には粒子・反粒子の区別が無く，逆にその区別がある場合には必ず複素場で表す必要があることが直ちに結論づけられる．

C 変換が複素（エルミート）共役に対応するということはゲージ変換を考察しても容易に理解可能である．量子力学で（電磁相互作用に関する）ゲージ変換は波動関数についての位相変換

$$\psi \quad \to \quad \psi' = e^{iq\lambda}\psi \tag{2.14}$$

であることを思い出そう．q は ψ の表す粒子の電荷，また，λ はゲージ変換のパラメターである．この式の複素共役をとると

$$\psi^* \quad \to \quad \psi'^* = e^{i(-q)\lambda}\psi^* \tag{2.15}$$

となるが，この変換性は，(2.14) において q を $-q$ に変えたものに等しいので，荷電共役変換に他ならないことが分かる．シュレディンガー方程式の波動関数はスピンの自由度を考慮しないもので，場の理論に置き換えればスカラー場に対応すると見ることができるので（実際シュレディンガー方程式を相対論的にしたのがクライン・ゴルドン方程式），上で議論した複素スカラー場 $\phi(x^\mu)$ に関してもゲージ変換は同じであり同じ議論が成立する．例えばストレンジネスは電磁相互作用で保存するが，こうした他の加算的量子数の保存則も (2.14) のような場に関する位相変換の下での不変性から電荷の場合と同様に導かれる．例えばストレンジネスの場合には，s クォークと $\bar{s}$ 反クォークの場のみが位相変換する変換の下での不変性から，ネーターの定理によってその保存則が導かれ

る．よって上の議論から，電荷に限らず，すべての加算的量子数の符号がC変換の下で逆転することが分かる．

弱い相互作用ではP対称性が最大限に破れていると述べたが，実はC対称性も破れていて，その破れが再び最大限の破れであることが分かっている．これらの事実を最も端的に表すこととして，ニュートリノ ν やその反粒子である反ニュートリノ $\bar{\nu}$ がそれぞれ特定のカイラリティーを持つという話をしよう．ここでの議論はニュートリノの"フレーバー"（電子型かどうかといった）には依らない．

まず**カイラリティー**とは何であろうか？　素粒子は一般にスピン角運動量を持つ（後述のヒッグス粒子のようにスピンを持たないものもあるが）．クォーク，レプトンといった物質を構成する素粒子は大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンを持ち，一方，力を伝える粒子であるゲージボソン（γ, $W^{\pm}$, Z^0）はいずれも大きさ1のスピンを持つ．スピンと統計性には関係があり，半整数のスピンを持つクォーク，レプトンはフェルミオン，整数スピンを持つゲージボソンは正にボソンである．カイラリティーはスピン $\frac{1}{2}$ の（正確には質量ゼロの）フェルミオンについて定義することができ，**右巻き**，**左巻き**という区別がある．

右巻きのフェルミオンとは，直感的に言うとスピンの回転の方向に右ネジを回転する場合にネジが進む方向に運動するフェルミオン，左巻きとは，同じことが左ネジを用いて言えるようなフェルミオンのことを言う．スピン角運動量 $\vec{S}$ の運動量方向の成分を"**ヘリシティー**" h と言う：

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p}. \tag{2.16}$$

これを用いると，右巻き，左巻きとは h（の固有値）がそれぞれ $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ の状態を言う．しかし，実際にはヘリシティーはローレンツ変換すると変わってしまう．例えば，ある慣性系Sから見て右巻きの状態で運動している質量を持ったフェルミオンがあったとして，その運動量の方向に，その速さより大きな速さで運動する慣性系S′から見ると，明らかに運動量ベクトルが反転し，一方スピン角運動量は変わらないので h の符号は逆転し左巻きの状態に見えることになる．これは相対論的な即ちローレンツ不変な理論では，質量を持ったフェルミオンは右巻き，左巻きの両方の状態を持たざるを得ないことを言っている．しかしながら，質量ゼロのフェルミオンを想定すると事情は大きく異なる．相対論よりフェルミオンは常に光速で運動するので，ローレンツ変換しても"巻き方"が変わることはない．つまり，この場合には巻き方はローレンツ不変な意味を持ち，これをカイラリティーと呼ぶ．**右巻きや左巻きのカイラリティー**を持つ質量ゼロのフェルミオンのことを**ワイル・フェルミオン (Weyl fermion)** と呼ぶ．それぞれ一般に ψ_R, ψ_L のように表す．数学的にはワイル・フェルミオンはローレンツ群の既約表現をなし，そのためにローレンツ変換の下で互い

に混ざることはないのである．逆に言うと，質量を持つフェルミオンは ψ_R と ψ_L が混合したものである．例えば，電子は独立な e_R，e_L（e は電子を表すスピノールの場のつもりであり，本来 ψ_e と書くべきであるが，簡略化して素粒子の名前をそのまま用いる）という2つの独立なワイル・フェルミオンの混合状態で $e = e_R + e_L$ と書けるが，こうした右巻き，左巻きを併せ持つフェルミオンは，最初に相対論的な電子の理論を確立したディラックに因み**ディラック・フェルミオン**と呼ばれる．明らかに，ワイル・フェルミオンはディラック・フェルミオンに比べて自由度が半分であり，独立な自由度としては2個の複素場のみを持つ．

右巻きと左巻きはローレンツ変換の下で独立に変換すると言ったが，理論的には右巻きと左巻きは必ずしも独立な粒子である必要はない．それは，左巻きの荷電共役をとった $(\psi_L)^c$（c は荷電共役の変換を表す）は右巻きの状態として振る舞うからである（詳しくは後述）．よって ψ_M を $\psi_M = \psi_L + (\psi_L)^c$ として構成すると，（P 変換同様に C 変換を2回行うと元に戻るので）$(\psi_M)^c = \{\psi_L + (\psi_L)^c\}^c = (\psi_L)^c + \psi_L = \psi_M$ となり ψ_M は C 変換の下で不変で粒子・反粒子の区別のない粒子である．スカラー場ならば実場に対応するが，こうした“実場的な”右巻きと左巻きが独立でない質量を持ったフェルミオンを**マヨラナ・フェルミオン (Majorana fermion)** と呼ぶ．ただし，電荷を持ったフェルミオンの場合には左巻きの粒子に右巻きの反粒子を混合させると電荷の違う素粒子を混合させることになり，電荷の保存則が破れてしまうことになるので，こうした状況は許されない．しかしながら，ニュートリノのような電荷を持たないフェルミオンに関してはこのようなことが可能となる．**マヨラナ・ニュートリノ**はニュートリノの質量が何故極端に軽いのかを説明するために柳田勉やゲルマン・ラモン・スランスキー (Gell-Mann, Ramond, Slansky) によって提唱された“**シーソー機構**”において本質的に重要な役割を演じる．

なお，ニュートリノに関しては，質量が仮にあるとしても非常に小さいことが分かっていたので素粒子の標準模型では質量の無い（左巻きの）ワイル・フェルミオンとして扱っている．最近，ニュートリノ振動というニュートリノ質量の存在を強く示唆する現象の存在が確立して来ているが，いずれにせよニュートリノ質量は非常に小さいので当面はワイル・フェルミオンとして扱うことにする．その他の電荷を持ったフェルミオンは本来ディラック型であるが，標準模型ではゲージ対称性のために理論の出発点においてはフェルミオンは質量項を持てず，ワイル・フェルミオンを用いて理論が記述されている．これは本質的に弱い相互作用がパリティー対称性を破っているために左右のワイル・フェルミオンについて非対称的である必要があることから来ている．最終的には南部により提唱されたゲージ対称性の自発的破れの結果としてフェルミオンは質量を持つことになる．ということで，電荷に関係なく，ワイル・フェルミオンを最も基本的なフェルミオンとして考えることができる．

ニュートリノはワイル・フェルミオンと考えてよいと述べたが，実はニュートリノは左巻きであることが実験的に確かめられている．ニュートリノは電気的に中性なレプトンなので，その反応は

$$\pi^+ \quad \to \quad \mu^+ + \nu_\mu \tag{2.17}$$

といった弱い相互作用によるもののみであり，この事実は弱い相互作用において左右対称性，即ちP対称性が破れていることを示している．実際，P変換により左手と右手が入れ替わるように，P変換によって左巻きニュートリノ ν_L は右巻きニュートリノ ν_R に変換されることが分かるので，左巻きニュートリノのみしか存在しないということはP対称性が最大限に破れていることを端的に示している．ちょうど左半分のみのハート形では線対称性が最大限に破れている（左半分の変換先の右半分が存在しないため）のと同様である．ところで弱い相互作用の代表例であるベータ崩壊

$$d \quad \to \quad u + e^- + \bar{\nu}_e \tag{2.18}$$

に現れるのは，電子型ニュートリノ ν_e の反粒子である（電子型）反ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ である．このベータ崩壊に関与している反ニュートリノは右巻きであることが実験的に分かっている．即ち $\bar{\nu}_R$ のみが存在することになる．C変換は粒子を反粒子に変換するものの（P変換と違い）カイラリティーを変えないと考えると，左巻きニュートリノ ν_L はC変換で同じ左巻きの反ニュートリノ $\bar{\nu}_L$ に変換されるので，右巻き反ニュートリノのみ存在するという事実は，弱い相互作用においてはC対称性も“最大限に”破れていることを意味するのである．なお，ニュートリノ以外の電荷を持ったフェルミオンに関しては左右両方のワイル・フェルミオンが存在するので一見これらの関与する弱い相互作用ではP, C対称性は破れないように思えるが，実際には，電荷を持ったフェルミオンに関しても β 崩壊のような弱い相互作用に“参加”するのは**粒子であれば左巻きのみ，反粒子であれば右巻きのみ**であることが分かっている．なお，却って混乱を招く可能性もあるが一応コメントすると，上の議論で $(\psi_L)^c$ は右巻きになると述べたので，C変換はカイラリティーも変えてしまうように思えるが，本来のC変換は，粒子を反粒子に変換した際に，同じカイラリティーの状態の間の変換を見る，というものである．つまり，C変換：$\psi_L \ \to \ (\psi^c)_L$ と見なすべきである（$(\psi^c)_L \neq (\psi_L)^c$ に注意）．

2.4 K 中間子のシステムにおける CP 対称性の破れの発見

弱い相互作用においてPおよびC対称性がいずれも最大限に破れていることを議論したが，CとPの両方の変換を続けて行う，即ちCとPを組み合わせた**CP変換**をするとどうなるであろうか．CP変換の下で左巻きニュートリ

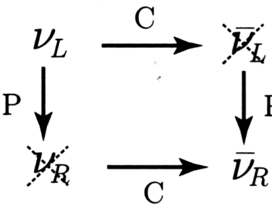


図 2.3　ニュートリノに関する C, P 変換．×印の状態は存在しない．

ノは CP : $\nu_L \to \bar{\nu}_L \to \bar{\nu}_R$ のように，右巻きの反ニュートリノに変換されるが，右巻き反ニュートリノは存在するのであるから，CP 変換の下で弱い相互作用は不変であるように思われる（図 2.3 を参照）．

実際，パリティー対称性の破れの発見の後も **CP 対称性**だけは破れずに存在するものと思われていた．しかしながら CP 対称性さえもわずかながら破れていることが 1964 年に米国のブルックヘブン国立研究所におけるクローニン (Cronin)・フィッチ (Fitch) とその共同研究者の実験によって示された．ここでも再び K 中間子が重要な役割を演じた．彼らが観測したのは

$$K_L \quad \to \quad \pi^+ + \pi^- \tag{2.19}$$

という，寿命の長いほうの中性 K 中間子 K_L（下で議論）の 2 個のパイ中間子への崩壊であったが，これは CP 対称性があると仮定すると決して起きない過程であったのである．

K 中間子およびその反粒子，$K^\pm, K^0, \bar{K}^0$ はストレンジ・クォーク s およびその反粒子 $\bar{s}$ を含んでいるのでストレンジネス $S = \pm 1$ を持つ．これらは通常，加速器で加速した陽子がターゲット中の核子と強い相互作用による反応を起こして生成されるが，強い相互作用では，以前述べたようにフレーバーは保存されるので，ストレンジネスは保存され粒子を区別する“良い”量子数になる．即ち，強い相互作用，電磁相互作用のみ働く世界では K^0 と $\bar{K}^0$ は別個の粒子として区別可能で互いに混ざり合うことはない．しかしながらフレーバーを保存しない弱い相互作用が関与すると，いくら相互作用が弱くても K^0 と $\bar{K}^0$ は，ほぼ 1 : 1 の比で大きく混合するのである．それは，K^0 と $\bar{K}^0$ が粒子・反粒子の関係にあるために，それらの質量が縮退しているからである．量子力学でも，エネルギーに縮退がある場合には小さな摂動でもエネルギー固有状態は大きく変化する（と言うよりは摂動が入って初めて固有状態が決まる）ことはよく知られている．具体的に言うと，K^0 と $\bar{K}^0$ は電気的に中性であるがために

$$\boldsymbol{K^0 \ \leftrightarrow \ \bar{K}^0} \ \textbf{混合}$$

という現象が可能になる．これに似た現象は量子力学における“二重井戸”ポテンシャルの問題でも起きる（図 2.4 参照）．

古典的には粒子はエネルギー最小の状態においてはポテンシャルの最小を与

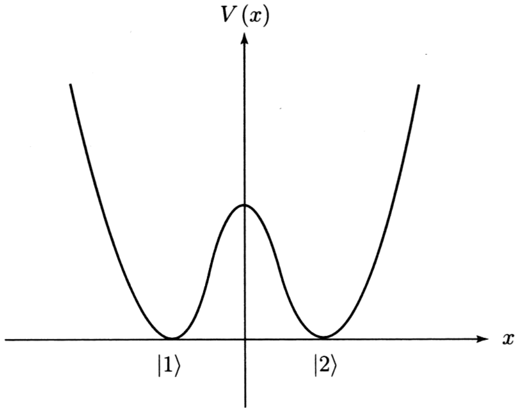


図 2.4　二重井戸ポテンシャルの量子力学.

える 2 つの場所のいずれかに局在する．量子力学で，それぞれの場所にほぼ局在する状態を $|1\rangle$，$|2\rangle$ で表すとすると，これらの状態は縮退したエネルギー E_0 を持つ．しかし，これらの間には**トンネル効果**によりわずかながら互いに行き来する確率があるため，$|1\rangle$，$|2\rangle$ の基底で書いたハミルトニアンに非対角項 ϵ（実数にとる）が現れる：

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \epsilon \\ \epsilon & E_0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

エネルギー固有値は

$$E_{1,2} = E_0 \pm \epsilon, \qquad \Delta E = E_2 - E_1 = 2\epsilon \tag{2.21}$$

となって，縮退していたエネルギーは非対角成分の分だけ分離することになる．またエネルギーの縮退のために "摂動" 項 ϵ により対応する固有状態は 2 つの縮退した状態の 1 : 1 の確率での混合状態となる：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle). \tag{2.22}$$

全く同様にして K 中間子に関しても $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合のために，

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \qquad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \tag{2.23}$$

で定義される K_1，K_2 が質量の固有状態になる．実は量子力学系の場合の ϵ が実数であることは K 中間子系においては CP 対称性が破れていないことに対応するが，現実の CP 対称性の破れた世界では質量の確定した状態は K_L，K_S と呼ばれる状態で，CP 対称性の破れのために K_1，K_2 とはわずかに異なる状態である．なお，$K_{L,S}$ は寿命が長い中性 K 中間子および寿命の短い中性 K 中間子という意味である（寿命はそれぞれ $\tau_L = 5.2 \times 10^{-8}$(s), $\tau_S = 8.9 \times 10^{-9}$(s)）．これらの間には $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合のために (2.21) の ΔE に対応する**質量差**が生

じるが，実測値は

$$\Delta m_K \equiv m_{K_L} - m_{K_S} = (3.483 \pm 0.006) \times 10^{-12}\ (\mathrm{MeV}) \tag{2.24}$$

であり，ほぼ縮退した中性 K 中間子の質量 $\simeq 500$ (MeV) に比べ非常に小さい．$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ ではストレンジネスが 2 変化する ($|\Delta S| = 2$)．このように電荷が変化せずフレーバー（この場合はストレンジネス）が変化する過程を一般に，**フレーバーの変わる中性カレント過程**，即ち「**FCNC (flavor changing neutral current) 過程**」と呼ぶ．詳しくは後述するが，こうした過程が起きる確率は (2.24) に見られるように一般に大変小さく，FCNC 過程は**稀少過程 (rare process)** とも呼ばれる．先に少し述べたように，標準模型における c クォークの導入には FCNC 過程の解析が大きな役割を果たしたが，それは c クォークの導入によって tree レベルでの FCNC を禁止することができ，標準模型の予言値を実験と矛盾しない程度に小さくできたからである（詳しくは後述）．

CP 対称性に話を戻そう．仮に CP 対称性が破れていないとすると中性 K 中間子は CP 固有値の確定した 2 つの状態で記述されるはずであるが，実際 CP の破れがない場合には $K_S = K_1$，$K_L = K_2$ となる．ここで $K_{1,2}$ はそれぞれ CP 固有値 ± 1 を持つことが次のような議論から分かる．まずこの教科書では

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \tag{2.25}$$

とする（文献により右辺にマイナスを付けて定義する場合もある）．K 中間子は P 固有値が -1 の擬スカラーであるので

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \tag{2.26}$$

となる．これから

$$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle, \qquad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle, \tag{2.27}$$

が分かる．P 対称性の破れに関する議論と同様にして，中性 K 中間子が 2 個のパイ中間子に崩壊する場合の終状態は CP 固有値が 1 の状態であり，一方 3 個のパイ中間子に崩壊する場合の終状態は CP 固有値が -1 の状態であることが分かる．よって CP 対称性がある限り K_1 は 2 個のパイ中間子に崩壊できるが K_2 は 2 個のパイ中間子には決して崩壊できず，3 個のパイ中間子にのみ崩壊可能となる．このために K_1（正確には K_S）のほうが崩壊先の位相空間が大きいので崩壊しやすく寿命が短いのである．しかしながら，1964 年にクローニン・フィッチらは CP 対称性があると起こり得ないはずの $K_L \to \pi^+ + \pi^-$ が起きていること，即ち CP 対称性が破れていることを発見した．ただし，この $K_L \to \pi^+ + \pi^-$ の崩壊確率は $K_S \to \pi^+ + \pi^-$ のそれに比べて 5×10^{-6} 程度で非常に小さい．P や C の対称性が最大限に破れていたのと比べると（少なく

とも K 中間子のシステムにおける）**CP 対称性の破れ**は小さいことになる．

ところで，後述のように，弱い相互作用においても，C, P, T という離散的変換をすべて同時に行う CPT 変換の下での対称性は破れ得ないことが理論的に証明されている．これは「**CPT 定理**」と呼ばれるが，これによれば CP が破れるということは **T 対称性が破れることと同値**である．即ち，弱い相互作用の世界では **C, P, T すべての離散的対称性が破れている**ことになる．

第 3 章
場の理論における離散的対称性

素粒子の世界では，反粒子について議論した際に述べたように粒子（反粒子）の生成や消滅が可能である．量子力学の範疇では，確率の保存則に見られるように，こうした生成・消滅は本来起こり得ないように思われる．それでは，どのような理論体系が**生成・消滅**を記述できるかと言うと，それは場の理論を量子化した「**場の量子論**」である．場とは電場 $\vec{E}(t,\vec{r})$ のように一般に時空座標 $x^{\mu}=(t,\vec{r})$ の関数のことを言う．電磁場はマクスウェル方程式から導かれる波動方程式に従い，したがって電磁波という空間を伝播する波動の性質を持つが，場は一般にこうした波動方程式に従う．この場を量子化した理論が「場の量子論」である．電磁場を量子化すると，電磁場のエネルギーが量子化され，振動数 ν の光（電磁波）のエネルギーは $h\nu$ の整数倍 $nh\nu$ $(n=0,1,2,\ldots)$ のみをとることになる．$h\nu=\hbar\omega$ （ここでは $\hbar$ を 1 とせず記している）であるので，この結果は各振動数の電磁場が，ちょうど調和振動子の量子化と同じように量子化されることを言っている．これは電磁場の振動は，力学系としてはちょうど弦の振動と同等であるが，一方弦は連成振動子において振動子間の距離をゼロにする極限で得られることからも自然な結果と言える．振動数 ν および波数ベクトル $\vec{k}$ の確定した電磁場の振動はちょうど連成振動子の**固有振動**に対応し，各固有振動は量子力学における調和振動子の量子化と全く同じようにして量子化される，ということである．こうした議論は電磁場のエネルギーが単に離散的になる（量子化）ことを言っているように思えるが，アインシュタインによれば量子化されたエネルギー準位 $n(h\nu)$ は $h\nu$ という単位のエネルギーを持った光の粒子，即ち**光子 (photon)** が n 個存在すると見るべきであり，n の増減は光子の生成や消滅によるものと理解すべきである．こうして場を量子化することで素粒子の生成・消滅を自由に記述することのできる理論が提供されることになる．この量子化の過程で，調和振動子のエネルギーの「昇降」演算子 $a^{\dagger}$, a は，ある運動量（波数 $\vec{k}$）を持った光子の「**生成・消滅」演算子** $a^{\dagger}(\vec{k})$, $a(\vec{k})$ と解釈されることになる．

3.1 ヘリシティー，カイラリティーとワイル・フェルミオン

(2.12) で与えられるようなスカラー場は，素粒子の標準模型で登場するヒッグスのようなスピンが 0 の素粒子を表すが，スピン 1 を持つゲージボソンを記述する場は相対論的な 4 元ベクトル（光子の場合の 4 元電磁ポテンシャルのような）$A_\mu(t,\vec{r})$ である．こうしたボソンを記述する場は（非相対論的な）空間回転を考えたときに回転不変なスカラーおよび 3 成分ベクトルのように変換するので，スピンとの対応が分かり易い．しかしフェルミオンであるスピン $\frac{1}{2}$ の素粒子は，**スピノール**と呼ばれる複素ベクトルで記述され，少し様相が違う．数学的にはスピノールとは，空間回転の場合だと 3 次元空間での回転という変換の集合である "直交群" $SO(3)$ のスピノール表現と呼ばれる既約表現のことを言うが，$SO(3)$ の場合にはスピノールは 2 成分の複素ベクトルで，これは物理的には，非相対論的な量子力学で現れる**パウリ・スピノール**に対応し，2 成分の複素数はスピンが上向き，下向きの状態にある確率振幅をそれぞれ表している．一般に $SO(n)$ (n: 2 以上の整数) という直交群の場合のスピノールは

$$2^{[\frac{n}{2}]} \quad \text{（[ ] はガウス記号）} \tag{3.1}$$

個の複素数を成分とする複素ベクトルになることが分かる．ここで $[\frac{n}{2}]$ は，この群の位数 (rank) に他ならない．ローレンツ変換の集合を表すローレンツ群は $SO(1,3)$（1 は時間に，3 は 3 次元空間に対応）であるが，これは（多少粗っぽい言い方をすると）$SO(4)$ とよく似た性質を持ち，そのスピノール表現は $2^{[\frac{4}{2}]} = 4$ 成分の複素ベクトルになる．これがディラックが相対論的な電子の記述のために導入した**ディラック・スピノール**に他ならない．こうして，スピン $\frac{1}{2}$ の素粒子であるクォーク，レプトンはディラック・スピノールで記述可能であるが，2.3 節で述べたように，質量ゼロのフェルミオンの右巻き，左巻きの状態に対応する**ワイル・フェルミオン**がより基本的な場であるとも言える．特に物理的に重要なのは，弱い相互作用では（最大限の）パリティー対称性の破れのために右巻きと左巻きの状態は非対称的になり，ニュートリノなどは左巻きの状態しか存在しないと思われていたという事実である．

そこで，ここではワイル・フェルミオンを記述するワイル・スピノールについて考えよう．例えば空間回転の下でスピンが回転を受け，その結果スピノールの各成分も変換を受けるように，P 変換のような離散的変換の下でも（場の独立変数である時空座標 $x^\mu = (t,\vec{r})$ だけでなく）スピノールの成分も何らかの変換を受けるはずである．この章ではそうした変換がどのようなものかを，P, C, T という離散的変換に関して順次考えて行こう．

その前に，ワイル・スピノールをディラック・スピノールを限定するという立場で見てみよう．そのために，まず，質量ゼロのフェルミオンのヘリシティーであるカイラリティーが γ_5 という行列（"カイラル演算子"）の固有値として理

解できるという話から始めよう．まず，電子のようなフェルミオンの従う相対論的量子力学の波動方程式はディラック方程式である．4 元運動量 $p^\mu = (E, \vec{p})$ が確定した平面波に関しては，ディラック・スピノール ψ について

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \tag{3.2}$$

で与えられる．ここで $\not{p} \equiv p^\mu \gamma_\mu$，また γ_μ はディラックのガンマ行列である．質量ゼロのフェルミオンに関してはローレンツ変換をしてもヘリシティーは不変であることを述べたが，これはヘリシティーを表す演算子がローレンツ変換の生成子 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ と可換であることを意味する．ヘリシティーはスピンに関係するので，ヘリシティーを表す演算子はガンマ行列を用いて表される行列であると予想できる．この行列が，すべてのガンマ行列を掛け合わせた $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ であることが分かる．実際，$[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5] = 0$ が容易に分かるので，γ_5 の固有値はローレンツ不変である．以下の例題を参照されたい．

例題 3.1　質量ゼロのフェルミオンに関しては，ヘリシティーの確定した状態，即ち右巻き，左巻きの状態は γ_5 の固有状態と一致することを示しなさい．

解　質量 m がゼロのフェルミオンの場合には，$E = p$ $(p = |\vec{p}|)$ なので，(3.2) より

$$p^i\gamma^i\psi = p\gamma^0\psi \quad \to \quad \frac{p^i(\gamma^0\gamma^i)}{p}\psi = \psi \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.3}$$

が得られる．ここで，例えば $\gamma^0\gamma^3$ は γ_5 に $\gamma^1\gamma^2$ を掛けたもので表すことができ，また $\gamma^1\gamma^2$ はスピンの第 3 成分 σ^3 に相当する．よって一般に $\gamma^0\gamma^i = \gamma_5\sigma^i$ と書けそうである．実際

$$\gamma^0\gamma^i = \gamma_5\frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\gamma^j\gamma^k = \frac{1}{2}\gamma_5\epsilon^{ijk}\sigma^{jk} = \gamma_5\sigma^i \tag{3.4}$$

が言える．よって，(3.3) より

$$\frac{p^i\gamma_5\sigma^i}{p}\psi = \psi \quad \to \quad \frac{p^i\sigma^i}{p}\psi = \gamma_5\psi \tag{3.5}$$

が得られる．こうして**ヘリシティーの確定した状態は γ_5 の固有状態と一致**することが分かる．γ_5 の固有値はヘリシティー h（の 2 倍）を与える．　□

$h = \pm\frac{1}{2}$ の右巻き，左巻きのワイル・フェルミオンを ψ_R, ψ_L で表すと，これらは γ_5 の固有値がそれぞれ 1，-1 のフェルミオンなので，$\gamma_5^2 = 1$（単位行列）を用いると容易に

$$\psi_R = R\psi, \quad \psi_L = L\psi \qquad \left(R = \frac{1+\gamma_5}{2},\ L = \frac{1-\gamma_5}{2}\right), \tag{3.6}$$

としてディラック・スピノール ψ から得られることが分かる．ここで R, L はそれぞれのワイル・フェルミオンを取り出す**射影演算子**と考えられる．実際，こ

れらは $\gamma_5 R = R$, $\gamma_5 L = -L$ の性質を持ち，また射影演算子の満たすべき性質である $R^2 = R$, $L^2 = L$, $LR = RL = 0$ も満たすことが容易に分かる．先に述べたが，ワイル・スピノールの自由度はディラック・スピノールの場合の半分になるので，4 成分でなく 2 成分のスピノールで表せるのではないかと予想される．このことは γ_5 が対角化されるようなガンマ行列の基底において明確になると思われる（この基底では γ_5 の異なる固有値を持つ $\psi_{R,L}$ は完全に分離できるであろう）．こうした基底を “カイラル基底 (chiral base)” と言い，この基底ではガンマ行列は具体的に以下のように与えられる：

$$
\begin{aligned}
&\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \\
&\sigma^\mu = (-I, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (-I, -\sigma^i), \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

ここで I は 2×2 の単位行列．γ_5 は対角化されているので，右巻き，左巻きのワイル・フェルミオンは明らかに，上半分，および下半分にのみ成分を持つ 2 成分スピノールとなる：

$$
\begin{aligned}
&R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad (\alpha,\ \dot{\alpha} = 1, 2).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

ここで，右巻き，左巻きのスピノールにはドット無しの添字 α，ドット付きの添字 $\dot{\alpha}$ がそれぞれ付けてある．これは単に 2 成分スピノールの添字と理解することもできるが，ドット付きのスピノールはドット無しのスピノールの C（荷電共役）変換でも得られることが分かる（2.3 節で $(\psi_L)^c$ は右巻きになると述べたことと同義．後で示す）．その意味でドットは複素共役を表すとも考えられる．数学的には，ローレンツ群が含む $SU(2)$ と同じ代数を満たす 2 つの独立な変換の下で，それぞれの 2 成分スピノールが基本表現として振る舞うことを表している．これら 2 つの変換はローレンツ変換の生成子 $\sigma_{\mu\nu}$ に R, L をそれぞれ掛けて得られる行列を生成子とする変換である．なお，例えば $R\sigma_{01}$ と $R\sigma_{23}$ は独立ではなく（“self-dual”），$R\sigma_{\mu\nu}$ には独立な生成子は 3 個のみで，それらが $SU(2)$ と同じリー代数を満たすことが容易に分かる．

3.2 場の P 変換

さて，いよいよ離散的変換の典型例として，P（パリティー）変換の下でフェルミオン（スピノール）を含む場がどのように変換するか考えてみよう．P 変換を 4 元の時空座標で表せば，空間座標の反転が起きて

$$\text{P}: \quad x^\mu = (t, \vec{r}) \quad \to \quad x_\mu = (t, -\vec{r}) \tag{3.9}$$

となる．厳密には変換後の空間座標を $\vec{r}'(= -\vec{r})$ として区別すべきだが煩雑なので $'$ を省略している．これに伴い，すべての場の独立変数である時空座標も変換を受ける．一番簡単なスカラー場の場合には

$$\text{P}: \quad \phi(x^\mu) \quad \to \quad \phi(x_\mu) \tag{3.10}$$

と変換される．

ここで，P 変換は単なる空間座標を反転させる変換と考えているが，既に議論したように量子化された場は生成・消滅演算子で書かれた演算子であるので，その変換は演算子に関する変換と見なされるべきものである．P 変換をユニタリー演算子 $\mathcal{P}$ で表すことにする．ここでユニタリーであることは，P 変換の固有値が実数 ± 1 なのでエルミートであり ($\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$)，よって $\mathcal{P}^2 = 1 \ \to \ \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} = 1$ であるからである．すると，場の P 変換は

$$\phi \quad \to \quad \mathcal{P}\phi\mathcal{P}^\dagger \tag{3.11}$$

と表されるはずである．スカラー場 ϕ の場合には，(2.12) に見られるように $\mathcal{P}$ は実際には生成・消滅演算子 $b(\vec{p})^\dagger$，$a(\vec{p})$ に作用すると考えられ，P 変換の下で運動量はその符号を変えるので，その変換性は

$$\mathcal{P}a(\vec{p})\mathcal{P}^\dagger = a(-\vec{p}), \quad \mathcal{P}b(\vec{p})\mathcal{P}^\dagger = b(-\vec{p}) \tag{3.12}$$

となるべきであろう．では，こうして定義される変換と (3.10) で与えられる変換は同一のものとなるであろうか？　具体的に (2.12) に P 変換をほどこすと

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}\,\phi(x^\mu)\,\mathcal{P}^\dagger \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \mathcal{P}a(\vec{p})\mathcal{P}^\dagger e^{-ip_\mu x^\mu} + \mathcal{P}b(\vec{p})^\dagger \mathcal{P}^\dagger e^{ip_\mu x^\mu} \right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ a(-\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + b(-\vec{p})^\dagger e^{ip_\mu x^\mu} \right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ip^\mu x^\mu} + b(\vec{p})^\dagger e^{ip^\mu x^\mu} \right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ip_\mu x_\mu} + b(\vec{p})^\dagger e^{ip_\mu x_\mu} \right\} \\
&= \phi(x_\mu)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となり，(3.10) の変換性が再現できることが分かる．5 行目の $p_\mu x_\mu$ という内積はローレンツ不変性を破っているように見えるが，最終的には積分変数の変換 $\vec{p} \to -\vec{p}$ を行えば $p^\mu x_\mu$ というローレンツ不変な内積に戻ることが分かる．

スカラー場はスピンが 0 の粒子を表すが，次にスピンが 0 でない粒子を表す場について考えてみよう．まずスピン 1 の粒子を取り上げよう．例えばスピン

1 の光子を表す場 A^μ は，ちょうど (3.9) と同じように独立変数の変換のみならず 4 元ベクトルとしてベクトルの成分も P 変換を受け，その空間部分（ベクトル・ポテンシャル）の符号は反転する：

$$\mathrm{P}: \quad A^\mu(x^\mu) \quad \to \quad A_\mu(x_\mu). \tag{3.14}$$

この変換は，先に議論した電磁場の P 変換を正しく再現するであろうか？ (3.14) より，例えば磁場は

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \to \quad \vec{B}' = \vec{\nabla}' \times \vec{A}' = (-\vec{\nabla}) \times (-\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \tag{3.15}$$

と変換し，確かに符号を変えない**軸性ベクトル**として正しく変換することが確かめられる．電磁場の変換はそもそもマクスウェル方程式が P 変換の下で不変であるように決めたわけなので，これを導く作用積分が P 不変である必要がある．実際，電磁場の場の強さテンソル $F_{\mu\nu}$ を用いてラグランジアン密度を書くと

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.16}$$

となるが，この P 変換は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x^\mu)F_{\mu\nu}(x^\mu) \\ \to \quad & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x_\mu)F^{\mu\nu}(x_\mu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x_\mu)F_{\mu\nu}(x_\mu) \end{aligned} \tag{3.17}$$

となり，独立変数のみ $x^\mu \to x_\mu$ と変更されることになる．しかし，作用は (3.17) の $\int d^4x$ 積分であり，積分変数を $\vec{r} \to -\vec{r}$ と置換すれば作用積分は P 不変であることが確かめられる．

次に，スピンが $\frac{1}{2}$ のフェルミオンを表す場であるスピノールの変換を考えてみよう．スピノールとしては 4 つの独立な成分を持つディラック・スピノールを想定する．先に述べたように P 変換では右手が鏡像変換で左手に変換されるように，右巻き，左巻きの性質，即ちカイラリティーが変化するので，P 変換は独立変数のみでなくスピノールの 4 成分ベクトルに関しても何らかの変換を引き起こすはずである．特にカイラリティーを変えるということは γ_5 と反可換（交換すると符号を変える）な，ガンマ行列を用いた行列による線形変換が必要と思われる．もちろんすべてのガンマ行列は $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ でありこうした性質を持つが，更にパリティー変換においては時間と空間を区別する必要があるので，おそらく γ^0 がこうした行列として適当と思われる：

$$\mathrm{P}: \quad \psi(x^\mu) \quad \to \quad \gamma^0\psi(x_\mu). \tag{3.18}$$

実際，(3.7) に見られるようにカイラル基底では γ^0 は非対角行列になっていて，確かに $\psi_R \leftrightarrow \psi_L$ というカイラリティーを変える線形変換を引き起こすことが

容易に分かる．更に，$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$，$(\gamma^0)^2 = 1$ より P 変換の満たすべき性質も満たしている．

この変換が確かに P 変換として妥当であることを更に確かめるために，ディラック方程式を導くラグランジアン密度の P 変換性を考えてみよう．このラグランジアン密度は，ディラック・スピノールを ψ として

$$\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{3.19}$$

である．実際，これの $\bar{\psi}$ に関する変分をとってみるとディラック方程式 $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$ が得られることが分かる．P 変換の下で偏微分は $\partial_\mu \ \rightarrow \ \partial^\mu$ と変換されるので，(3.19) が P 変換の下で不変であるためにはスピノールの 2 次形式が

$$\mathrm{P}: \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \rightarrow \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{3.20}$$

と変換されるべきであるが，$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_\mu$ の関係に気をつけると確かに

$$\mathrm{P}: \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \rightarrow \quad \overline{(\gamma^0\psi)}\gamma^\mu\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{3.21}$$

と変換することが分かる．こうして (3.19)（の作用積分）は P 変換の下で不変である．4 章で議論するように，電子の電磁相互作用を記述する理論である量子電気力学 (QED) の電子に関わる部分のラグランジアン密度は

$$\bar{\psi}[(i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu - m]\psi \tag{3.22}$$

で与えられるが，(3.14) および (3.21) より，QED のラグランジアンは P 変換の下で不変であり，したがって電磁相互作用は P 対称性を持っていることが結論づけられる．

スカラー場のときに議論したのと同様に，P 変換の演算子 $\mathcal{P}$ の下でスピノール場がどのように変換するかについて次の例題で考えてみよう．

例題 3.2 まず，量子化されたスピノール場は

$$\psi(x^\mu) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \times \sum_s \left\{ b(\vec{p},s)u(\vec{p},s)e^{-ip_\mu x^\mu} + d(\vec{p},s)^\dagger v(\vec{p},s)e^{ip_\mu x^\mu} \right\} \tag{3.23}$$

と表される．ここで $b(\vec{p},s)$，$d(\vec{p},s)$ は運動量 $\vec{p}$，スピン $s = \pm\frac{1}{2}$ を持つフェルミオン，およびその反粒子の消滅演算子であり，u，v は $(p\!\!\!/ - m)u(\vec{p},s) = 0$，$(p\!\!\!/ + m)v(\vec{p},s) = 0$ を満たすベクトルである．P 変換により，運動量は符号を変えるが，スピンは不変なので，消滅演算子のユニタリー変換は $\mathcal{P}b(\vec{p},s)\mathcal{P}^\dagger = b(-\vec{p},s)$，$\mathcal{P}d(\vec{p},s)\mathcal{P}^\dagger = d(-\vec{p},s)$ と考えられる．このとき，スピノール場は (3.18) と同じように変換することを示しなさい．

解 スカラー場に関する議論と同様にすると，量子化されたスピノール場の P

変換は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}\psi(x^\mu)\mathcal{P}^\dagger \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \\
&\quad\times \sum_s \left\{\mathcal{P}b(\vec{p},s)\mathcal{P}^\dagger u(\vec{p},s)e^{-ip_\mu x^\mu} + \mathcal{P}d(\vec{p},s)^\dagger\mathcal{P}^\dagger v(\vec{p},s)e^{ip_\mu x^\mu}\right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_s \left\{b(-\vec{p},s)u(\vec{p},s)e^{-ip_\mu x^\mu} + d(-\vec{p},s)v(\vec{p},s)e^{ip_\mu x^\mu}\right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_s \left\{b(\vec{p},s)u(-\vec{p},s)e^{-ip^\mu x^\mu} + d(\vec{p},s)v(-\vec{p},s)e^{ip^\mu x^\mu}\right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_s \left\{b(\vec{p},s)\gamma^0 u(\vec{p},s)e^{-ip^\mu x^\mu} + d(\vec{p},s)\gamma^0 v(\vec{p},s)e^{ip^\mu x^\mu}\right\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\sum_s \{b(\vec{p},s)\gamma^0 u(\vec{p},s)e^{-ip_\mu x_\mu} + d(\vec{p},s)\gamma^0 v(\vec{p},s)e^{ip_\mu x_\mu}\} \\
&= \gamma^0\psi(x_\mu)
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

となり，確かに (3.18) と同じ変換性が得られることが分かる．ただし，ここで $(\not{p}-m)u(\vec{p},s)=0 \to (p^\mu\gamma^\mu-m)\gamma^0 u(\vec{p},s)=0$ を用いて $u(-\vec{p},s)=\gamma^0 u(\vec{p},s)$ とした．$v(\vec{p},s)$ についても同様である． □

(3.22) において電子の電磁場との相互作用を表すのは $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ であるが，これによって電子によるカレント $j^\mu=-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ が存在すると，それに比例して量子化された場 A_μ によって光子が生成されて伝播し，別の場所で A_μ によって光子が消滅，即ち電子に吸収され，電子にカレントに比例した電磁気的力を及ぼす，といった過程が可能になる（図 3.1）．力を媒介する光子は当然光速で伝播すべきなので質量を持たず，そのためクーロン力に見られるように電磁気的な相互作用は遠方まで到達する遠距離力となる．

これに対して弱い相互作用の典型例である**中性子のベータ崩壊**については，

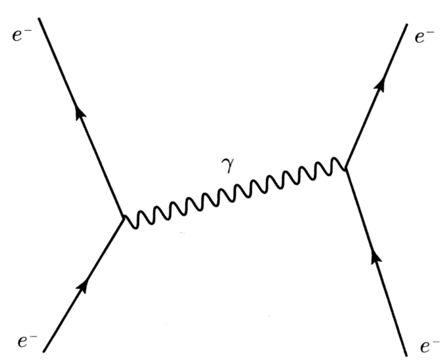


図 3.1 光子の交換による電磁相互作用を表すファインマン図．

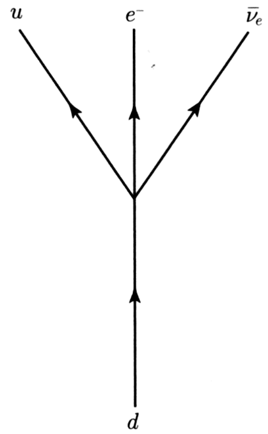


図 3.2　クォークに関するベータ崩壊を表すファインマン図.

少なくとも 1934 年にフェルミによってその理論が提唱された当時は，弱い相互作用は非常な短距離力であったために図 3.2（クォークレベルでの反応を表している）に見られるように，光子のような力を媒介する粒子は無く，時空の一点でカレントどうしが直接接触する形で起きると考えられた.

これを**接触相互作用 (contact interaction)** と言う．つまり**フェルミの理論**ではベータ崩壊は次のようなカレントの積の形で書かれる相互作用ハミルトニアンによって引き起こされる.

$$\begin{aligned}&\frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)d^0\cdot\bar{e}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\nu_e+h.c.\\&=2\sqrt{2}G_F\bar{u}_L\gamma^{\mu}d_L^0\cdot\bar{e}_L\gamma_{\mu}\nu_{eL}+h.c.\end{aligned}\tag{3.25}$$

ここで $h.c.$ はエルミート共役を表す．また d^0 は標準模型の所で議論するようにフレーバー混合のために純粋な d クォークではなく s,b クォークも少し混ざった状態である．G_F はフェルミ結合定数と呼ばれ，実験データとの比較から

$$G_F=1.166\times10^{-5}\ (\mathrm{GeV}^{-2})=1.027\times10^{-5}(m_P)^{-2}\tag{3.26}$$

と決められた．これにベータ崩壊に関与する陽子の質量 m_P の 2 乗を掛けて無次元量を作ると $G_F m_P^2=1.027\times10^{-5}$ であり，電磁相互作用の強さを表す微細構造定数 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}$ に比べ非常に小さいことが分かる．これが弱い相互作用が “弱い” と呼ばれる所以である．逆に言うと m_P の 2 乗の代わりに 10^2 (GeV) の 2 乗を掛けて 4π で割ると α と同程度になり，これは 10^2 (GeV) 程度のエネルギー・スケールでは弱い相互作用と電磁相互作用が統一的に記述可能であることを示唆している．実際，後で見るように標準模型では弱い相互作用も 10^2 (GeV) 程度の質量を持つ $W^{\pm}$ といったゲージボソンの媒介によって生じ，低エネルギーで短距離力に見えるのは $W^{\pm}$ の質量が大きいために力の到達距離がそれに逆比例して（不確定性関係より）小さくなるからであると考え

られている．10^2 (GeV) を超えるエネルギー領域では大雑把に言えば $W^{\pm}$ も質量が無視できて光子同様になり，**電磁相互作用と弱い相互作用の統一的記述**が可能になるのである．

(3.25) においては u, d, e, ν_e とさりげなく粒子の名前を用いているが，これらはそれぞれのクォーク，レプトンに対応するディラック・スピノールを表している．正確には最近までニュートリノは質量を持たず左巻きの状態のみを持つワイル・フェルミオンであるとされていたので，ν_e で表される場は 2 成分のみを持つワイル・スピノールと考えてよいが，$R\nu_e = 0$ という条件のついた 4 成分スピノールとしても良いので特に区別していない．(3.25) で $2L = 1 - \gamma_5$ が挿入されているために，実際に弱い相互作用に関与するのは左巻きのフェルミオンのみとなり，そのため u_L 等の左巻きのフェルミオンを用いた書き方もされている．なお，例題 3.2 から分かるように，例えば ν_{eL} はニュートリノの消滅あるいは反ニュートリノの生成を引き起こす演算子と見なせる．他のフェルミオンに関しても同様であるので (3.25) は d クォークを消滅させて，$u, e^-, \bar{\nu}_e$ を生成する役割を果たし，これによって図 3.2 のような過程が生じることが分かる．

先に直感的に述べたように，弱い相互作用において左巻きのフェルミオンのみが関与しているということは左右の対称性が最大限に壊れているわけで，(3.25) は，P 対称性を最大限に破っているはずである．実際 $\{\gamma^0, \gamma_5\} = 0$ より射影演算子に関して

$$\gamma^0 L \gamma^0 = R \tag{3.27}$$

が言えるので，(3.25) の項は P 変換の下で

$$\mathrm{P}: \quad 2\sqrt{2}G_F \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \cdot \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_{eL} \quad \to \quad 2\sqrt{2}G_F \bar{u}_R \gamma_\mu d_R \cdot \bar{e}_R \gamma^\mu \nu_{eR} = 0 \tag{3.28}$$

のように変換し，左右が逆転して元の相互作用とは完全に形が変わってしまう．ちょうど図 1.1 において左半分のみのハート形がある場合に線分 L で折り返されて右半分のハート形になったようなもので，変換前と変換後には一切図形の重なりが無いので，線対称性が最大限に壊れていることと同様な状況である．実際には，P 対称性の最大限の破れを表す事実としてニュートリノには右巻きの状態が無いので $\nu_{eR} = 0$ であり P 変換後の演算子は存在しない．このようにベータ崩壊を表す相互作用ハミルトニアン (3.25) は P 変換の下で不変ではなく，したがって弱い相互作用においては P 対称性は破れていることになる．なお，上の議論で $\nu_{eR} = 0$ は右巻きのニュートリノが存在しないことを表すと述べたが，実際の中性子のベータ崩壊では反ニュートリノが生成されるので，これは（下の C 変換の所で議論するように）左巻きの反ニュートリノが存在しないことを述べている．

3.3 場の C 変換

次に C 変換が場にどのように作用するのかを見てみよう．既に (2.13) や (2.15) において見たように，C 変換は一般に場の複素共役（量子化された場と見なす場合にはエルミート共役）の操作を含むが，フェルミオンの場合には P 変換のときと同様に 4 成分のスピノールに対しても何らかの線形変換が行われると予想される．実際，QED のラグランジアン (3.22) において C 対称性（C 不変性）を要請すると，(2.5) より，C 変換後の電子の場を ψ^c と書くと

$$\mathrm{C}: \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \to \quad \bar{\psi}^c\gamma^\mu\psi^c = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{3.29}$$

を満たすようにスピノール ψ は変換する必要があるが，単に $\psi^c = \psi^*$ とすると (3.29) の変換性を満たすことはできない．そこで

$$\psi^c \equiv C\bar{\psi}^t \qquad (t: \text{転置}) \tag{3.30}$$

と，4×4 行列 C を用いて書くことにすると (3.29) を満たすためには

$$C^\dagger\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^t \tag{3.31}$$

が条件となることが分かる．これを満たす C の表式はガンマ行列の表示によるが，(3.7) を用いると

$$C = i\gamma^0\gamma^2 \tag{3.32}$$

と（位相因子の不定性を除き）決めることができる．なお (3.29) は，反粒子になると電荷の符号が逆転するので 4 元カレント j^μ の符号が反転することを意味している．

こうして電磁相互作用には C 対称性があることが分かるが，2 章で述べたように弱い相互作用においては C 対称性も最大限に破れている．これを見るために $C^\dagger\gamma_5 C = \gamma_5$ から得られる

$$C^\dagger\gamma^\mu(1-\gamma_5)C = -(1+\gamma_5)(\gamma^\mu)^t \quad \to \quad C^\dagger\gamma^\mu LC = -(\gamma^\mu R)^t \tag{3.33}$$

に気をつけると，一般に $\bar{\psi}_1^c\gamma^\mu L\psi_2^c = -\bar{\psi}_2\gamma^\mu R\psi_1$ が導かれる．これからベータ崩壊の相互作用ラグランジアンは C 変換の下で

$$\begin{aligned} \mathrm{C}: \quad & 2\sqrt{2}G_F\bar{u}_L\gamma^\mu d_L \cdot \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} + h.c. \\ \to \quad & 2\sqrt{2}G_F\bar{d}_R\gamma^\mu u_R \cdot \bar{\nu}_{eR}\gamma_\mu e_R + h.c. = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

のように変換されることが分かる．よって，再び左巻きから右巻きへの変換が生じ，また ν_R は存在しないとしているのでラグランジアンは C 変換の下で不変ではないことが分かる．

2.3 節で既に述べたことであるが，上の議論から C 変換で実質的にフェルミ

オンのカイラリティーが変わっているようにも見える．しかし一方では本来 C 変換とは粒子と反粒子の間の変換であり P 変換と違ってカイラリティーを変化させない変換と解釈すべきであるように思える．この辺の事情を理解するために，ガンマ行列のカイラル基底 (3.7) を用い，また (3.8) よりディラック・スピノール ψ を

$$\psi = \psi_R + \psi_L = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

と記述すると，4 成分すべてを持つ**ディラック・スピノールに関する C 変換**は

$$\text{C}: \quad \psi = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \psi^c = -i\gamma^2\psi^* = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

となる．ここで 2 成分の添字の上げ下げを 2 階の完全反対称テンソル（Levi–Civita テンソル）$\epsilon_{\alpha\beta}$ を用いて $\eta_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\eta^\beta$ のように行った．即ち，Levi–Civita テンソルがスピノールの 2 成分表示における計量テンソルの役割を果たすことになるが，これはちょうど量子力学での角運動量の合成において 2 つのパウリ・スピノールを反対称に組んでスピンが 0 の 1 重項，即ち $SU(2)$ 不変量を作ることができるという事実に対応している．(3.36) より C 変換は $\eta_\alpha \leftrightarrow \xi_\alpha$，即ち $\psi_R \leftrightarrow (\psi^c)_R$ のようにカイラリティーを変えることなく粒子と反粒子の入れ替えを行う変換と見ることができて，これが本来の C 変換の意味であろう．しかしながら，例えば $\xi = 0$ の場合，即ちワイル・スピノールの場合には C 変換はむしろ $\eta_\alpha \leftrightarrow \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$，即ち $\psi_R \leftrightarrow (\psi^c)_L$ という変換と見ることもできる．これは (3.36) に見るように C 変換は複素共役をとった後に $-i\gamma^2$ を掛けることと同等であるが，γ^2 が非対角行列であることからも理解できる．つまり $(\psi_R)^c = (\psi^c)_L \neq (\psi^c)_R$．直感的には，C 変換は複素共役を含むので，ドット無し α とドット付き $\dot{\alpha}$ の間の変換と考えるとこれは自然なことではある．このようにワイル・フェルミオンの場合には少し注意が必要であるが，あくまで C 変換は粒子・反粒子の変換でカイラリティーは変えないものと考えることにする．

ところで，(3.35) において特に $\xi_\alpha = \eta_\alpha$ の関係がある場合には，(3.36) より C 変換の下で不変なフェルミオンになるが，これが粒子・反粒子の区別のないマヨラナ・フェルミオンを表す**マヨラナ・スピノール**に他ならない：

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

3.4 場の CP 変換

(3.34) から分かるように，C 変換に加えて P 変換も同時に行えば左巻き

の相互作用に戻り，ベータ崩壊のラグランジアンは不変になりそうである．即ち，弱い相互作用においても C と P を組み合わせた CP 対称性だけは壊れていないように思える．これは，以前議論した弱い相互作用に参加する反ニュートリノは，左巻きニュートリノを CP 変換した右巻き反ニュートリノであるという事実からも予想されることである．実際容易に分かるように $\overline{\psi_1^c}\gamma^0\gamma^\mu L\gamma^0\psi_2^c = \overline{\psi_1^c}\gamma_\mu R\psi_2^c = -\bar{\psi}_2\gamma_\mu L\psi_1$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{CP}: \quad & 2\sqrt{2}G_F\bar{u}_L\gamma^\mu d_L \cdot \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} + h.c. \\ \to \quad & 2\sqrt{2}G_F\bar{d}_L\gamma_\mu u_L \cdot \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L + h.c. \end{aligned} \tag{3.38}$$

となる．一見ラグランジアンは不変でないように思えるが，エルミート共役 $h.c.$ の項も考慮すると CP 変換の下で不変になっていることが分かる．こうして P や C 対称性の破れの発見の後も CP 対称性だけは破れていないものとしばらく考えていたが，2.4 節で述べたように中性の K 中間子の崩壊実験から CP 対称性もわずかながら破れていることが判明し，理論家はその説明を求められた．

そこで，**CP 対称性の破れ**を理論的に説明するには，どのような条件が必要とされるかという必要条件を考えてみよう．(3.38) の変換性を $h.c.$ を省略せずに書くと

$$\begin{aligned} \mathrm{CP}: \quad & 2\sqrt{2}G_F(\bar{u}_L\gamma^\mu d_L \cdot \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L \cdot \bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu e_L) \\ \to \quad & 2\sqrt{2}G_F(\bar{d}_L\gamma_\mu u_L \cdot \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma_\mu d_L \cdot \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL}) \end{aligned} \tag{3.39}$$

となり確かに不変であることが分かるが，仮にフェルミ結合定数 G_F が複素数だとすると，変換は

$$\begin{aligned} \mathrm{CP}: \quad & 2\sqrt{2}G_F\,\bar{u}_L\gamma^\mu d_L \cdot \bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} + 2\sqrt{2}G_F^*\,\bar{d}_L\gamma^\mu u_L \cdot \bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu e_L \\ \to \quad & 2\sqrt{2}G_F\,\bar{d}_L\gamma_\mu u_L \cdot \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L + 2\sqrt{2}G_F^*\,\bar{u}_L\gamma_\mu d_L \cdot \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL} \end{aligned} \tag{3.40}$$

となり，もはや相互作用ハミルトニアンは変換の下で不変ではなくなる．このように，CP 対称性は結合定数が実数かどうかに深く関わり，CP 対称性を破るためには一般に複素数の，即ち**位相を持った結合定数**が必要となる．**小林・益川理論**の議論は正に，$K_L \to \pi^+\pi^-$ で実験的に示された CP 対称性の破れを説明するために必要な位相を持った結合定数を得る条件を深く考察し，CP 対称性を破るためには 3 世代のクォークが必要であることを初めて示したものである．

CP 変換も P 変換と同様に 2 回繰り返せば元に戻るという性質はあるが，CP 対称性が離散的対称性であるという根拠はどこにあるであろうか．CP 変換には C 変換が含まれるので必ず場に関する複素共役の作用が加わる．複素数 $Z = a + ib$ (a, b : 実数) の複素共役をとる変換 $Z = a + ib \to \bar{Z} = a - ib$ は複素平面上では $(a, b) \to (a, -b)$ のような実軸に関する折り返しの変換であり，ベ

クトル $(a,b)^t$ に関する変換の行列は $\mathrm{diag}(1,-1)$ で行列式が -1 の行列なので，P 変換や図形における線対称変換と同様に離散的変換であることが分かる．

3.5 場の T 変換

一連の離散的対称性に関する議論の最後として，ここでは場の時間反転（T 変換）の下での変換性を考えてみよう．ここまで扱った P や C 変換は，P 変換のときに少し詳しく議論した演算子 $\mathcal{P}$ による変換のように，場に作用するユニタリー変換と解釈できた．しかしながら，T 変換に関しては少し注意が必要である．論点の本質は，場の量子論にまで行かずとも量子力学のレベルでも理解できる．T 不変性を持つ相互作用ハミルトニアン H_{int} により，初期状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ へ遷移する場合の確率振幅は（摂動の 1 次のオーダーで）

$$\langle f|H_{int}|i\rangle \tag{3.41}$$

と表されるが，時間反転（T 変換）してみると，始状態と終状態は入れ替わるので，遷移振幅は $\langle i|H_{int}|f\rangle$ で与えられる．ここで $\langle i|H_{int}|f\rangle = \langle f|H_{int}|i\rangle^*$ なので，T 変換は **c 数**（古典的 (classical) な量子化されていない数の意）に関する複素共役という操作を必要とすることが直観的には予想できる．あるいは時間発展を表す演算子 e^{iHt} に見られるように，量子力学では時刻 t は虚数単位 i に伴われて現れるので，時間反転は複素共役に相当するとも考えられる．

もう少しきちんと考えてみよう．T 不変なハミルトニアン H を想定する．即ち，T 変換の演算子を $\mathcal{T}$ と書くと，$\mathcal{T}^{-1}H\mathcal{T} = H$．このハミルトニアンを用いたシュレディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{3.42}$$

で与えられる．T 変換を行って $t \to t' = -t$，また $\psi(t) \to \psi'(t') = \mathcal{T}\psi(t)$ と変換されるとしよう．T 不変性とはシュレディンガー方程式の形が不変ということなので

$$i\frac{\partial}{\partial t'}\psi'(t') = H\psi'(t') \tag{3.43}$$

が成立するはずである．これを元の t および ψ で表すと

$$(-i)\mathcal{T}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\mathcal{T}\psi(t) \tag{3.44}$$

となる．左から $\mathcal{T}^{-1}$ を作用させると

$$\mathcal{T}^{-1}(-i)\mathcal{T}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t) \tag{3.45}$$

となる．ここで $\mathcal{T}^{-1}H\mathcal{T} = H$ を用いた．よって，これが元のシュレディンガー方程式と一致するためには

$$\mathcal{T}^{-1}(-i)\mathcal{T} = i \tag{3.46}$$

が必要となる．この例から分かるように，**T 変換は c 数の複素共役を伴うこと**が分かる．そこで $\mathcal{T} = \mathcal{U}K$ と置いてみよう．K は右にあるものすべての複素共役を取る演算子である ($K^2 = 1$)．すると，(3.46) より $\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U} = 1$ を満たす通常の演算子（実際にはユニタリー演算子）と見なせることが分かる．このように T 変換は普通のユニタリー変換と（c 数を含む）複素共役の作用の組み合せで表すことができ，そのため **"反ユニタリー (anti-unitary)" 変換**であると言われる．反ユニタリー演算子は $\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T} = 1$ を満たすが，エルミート共役の定義が，任意の状態 $|A\rangle$，$|B\rangle$ に対して $\langle A|\mathcal{T}^\dagger|B\rangle = \langle \mathcal{T}A|B\rangle^*$ のように，通常の定義に対して複素共役だけずれたような "反線形演算子" である．なお，ここで示したことは量子力学でよく議論する，$t \to -t$ の変換の後に複素共役を取ればシュレディンガー方程式が変わらない，という主張と同等である．

では，T 変換 $\mathcal{T}$ が場に対してどのように作用するかを見てみよう．ここでは，一番自明でなさそうなスピノール場について変換性を考えてみることにする．T 変換で ψ（ディラック・スピノールであり，上の量子力学の話で出てきた波動関数と混同しないようにしよう）は $\mathcal{T}\psi = \mathcal{U}K\psi$ に変換されるものとする．$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は 4 元ベクトルとして振る舞うが，先に QED の例の場合に説明したように，この場が表すフェルミオンが電荷 q を持つとすれば $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は 4 元電磁ポテンシャルに結合する，保存する ($\partial_\mu j^\mu = 0$) 4 元電磁カレント $j^\mu = (\rho, \vec{i})$ を表す．よって，その T 変換は，ρ は不変で電流密度 $\vec{i}$ は符号を変えるので

$$\mathrm{T}: \quad j^\mu \quad \to \quad j_\mu \tag{3.47}$$

となる．これと同様に 4 元ベクトル $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ も変換するべきである．即ち

$$\mathcal{T}^{-1}\bar{\psi}(t)\gamma^\mu\psi(t)\mathcal{T} = \bar{\psi}(-t')\gamma_\mu\psi(-t'). \tag{3.48}$$

ここで ψ の $\vec{r}$ 依存性は省略している．$\mathcal{T}^{-1}\psi(t)\mathcal{T} = U\psi(-t')$ （U はスピノールに作用する行列）とし，また $\mathcal{T}^{-1}(\gamma^0\gamma^\mu)\mathcal{T} = K(\gamma^0\gamma^\mu)K = (\gamma^0\gamma^\mu)^*$ に気を付けると，(3.48) の条件は

$$U^\dagger(\gamma^0\gamma^\mu)^*U = \gamma^0\gamma_\mu \tag{3.49}$$

を課すことと同値である．$(\gamma^\mu)^* = \gamma_\mu$ が成り立つのは $\mu = 0, 2$ のときのみなので，(3.49) を満たす U は γ^0, γ^2 とは交換し γ^1, γ^3 とは反交換する行列として考えることができる．そのような行列 U はガンマ行列を用いて

$$U = i\gamma^1\gamma^3 \tag{3.50}$$

と容易に構成することができる．位相 i は $U^2 = 1$ となるように付けた．こう

してスピノール場に対する T 変換は，結局

$$\psi(t) \quad \to \quad \psi'(t') = \mathcal{T}^{-1}\psi(t)\mathcal{T} = i\gamma^1\gamma^3\psi(-t') \tag{3.51}$$

で与えられることになる．変換後の t' を改めて t と書けば，変換性は単に

$$\psi(t) \quad \to \quad i\gamma^1\gamma^3\psi(-t) \tag{3.52}$$

とも書ける．

ところで，素粒子の相互作用において T 対称性は存在するであろうか．電磁相互作用には T 対称性があることを既に議論したが，同様に強い相互作用においても T 対称性は破れないことが分かっている．しかし弱い相互作用においては T 対称性も破れていることが知られている．例えば，中性 K 中間子の $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合において，K^0 が $\bar{K}^0$ に遷移する確率と，この過程を "ビデオに撮り" 逆回しして得られる $\bar{K}^0$ が K^0 に遷移する確率は異なる：

$$\Gamma(K^0 \to \bar{K}^0) \neq \Gamma(\bar{K}^0 \to K^0). \tag{3.53}$$

興味深いのは，この対称性の破れは CP 対称性の破れとも解釈できることである．実際，K^0 と $\bar{K}^0$ は CP 変換で互いに交換する．こうした，T 対称性の破れと CP 対称性の破れの同一性は実は偶然ではなく，次に述べる "CPT 定理" と呼ばれる定理の必然的な帰結である．

3.6 CPT 定理

ここまで，P, C, T という 3 つの独立な離散的対称性に関して議論してきた．電磁相互作用，強い相互作用においてはこれらの対称性はいずれも破れていないが，弱い相互作用においては既に述べたようにこれらの対称性はすべて破れている．このように対称性が破れるかどうかは相互作用により大きく異なるが，相互作用に関係なく成立する対称性として **CPT 対称性**（C, P, T という 3 つの変換を同時に行う変換の下での対称性）が存在する．即ち「相対論的で，かつ局所的な相互作用のみを持つ場の理論においては，CPT 対称性が常に存在する」と言えるのである．この事実は「**CPT 定理**」と呼ばれている．

この定理のきちんとした証明は少々面倒でありここでは扱えないが，証明の大まかな道筋を以下に述べよう．まず今までの C, P, T 変換の結果をまとめると，P, T 変換により場の独立変数である時空座標のすべてが符号を変え ($x^\mu \to -x^\mu$)，また C 変換は複素共役変換に対応するので，例えば一番簡単な実スカラー場は

$$\text{CPT}: \quad \phi(x^\mu) \quad \to \quad \phi(-x^\mu) \tag{3.54}$$

という変換を受ける．ゲージ場のようなスピン 1 の実場に関しては，C 変換において符号が変わることを考慮して

$$\text{CPT}: \quad A_\mu(x^\mu) \quad \to \quad -A_\mu(-x^\mu) \tag{3.55}$$

となる．こうした変換性はまとめられて，一般にローレンツ変換の下で n 階のテンソルとして振る舞う実数のボソン場 $\phi_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}$ についての変換は

$$\text{CPT}: \quad \phi_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(x^\mu) \quad \to \quad (-1)^n \phi_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n}(-x^\mu) \tag{3.56}$$

で与えられることが分かる．一方フェルミオンであるスピノール場についての変換は，C 変換で現れる $C = i\gamma^0\gamma^2$ と T 変換で現れる $U = i\gamma^1\gamma^3$ の積がちょうど $i\gamma^5$ にまとまることから

$$\text{CPT}: \quad \psi(x^\mu) \quad \to \quad i\gamma^5\gamma^0\bar{\psi}^t(-x^\mu) \tag{3.57}$$

となることが分かる．CPT 定理の証明において重要な事実は，ローレンツ不変性の要請から局所的な相互作用からなるラグランジアンにおいては，その相互作用項はスピノール場の 2 次形式で作られるテンソルとボソン場からなるテンソルのローレンツ不変な縮約によって与えられるということである．スピノール場の 2 次形式で作られるテンソルが (3.56) で与えられるボソン場のテンソルと同じ変換性になれば，それらの縮約によって得られる相互作用項は単に独立変数 x^μ の符号の変換になり，したがって

$$\text{CPT}: \quad \mathcal{L}(x^\mu) \quad \to \quad \mathcal{L}(-x^\mu) \tag{3.58}$$

となるのである．作用積分では積分変数の変換 $-x^\mu \to x^\mu$ が可能であるから，こうして作用積分，即ち理論が CPT 変換の下で不変であることが示される．なおラグランジアンにおいては，典型的にはそれぞれの場の運動項に見られるように偏微分 ∂_μ が現れるが，CPT で $\partial_\mu \to -\partial_\mu$ のように変換するので，微分を作用させて作られるより高い階数のテンソルも明らかに (3.56) の変換性に従っている．よって上の議論は崩れない．

そこで，スピノール場の 2 次形式でできるテンソル $\bar{\psi}(x^\mu)\Gamma\psi(x^\mu)$ $(\Gamma = 1, i\gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu})$ を一般的に考えると，その CPT 変換性は

$$\begin{aligned}(\mathcal{CPT})^{-1}\bar{\psi}(x^\mu)\Gamma\psi(x^\mu)\mathcal{CPT} &= \psi^t(-x^\mu)\gamma^5\gamma^0(\Gamma)^*\gamma^5\gamma^0\bar{\psi}^t(-x^\mu) \\ &= -\bar{\psi}(-x^\mu)\gamma^0\gamma^5\Gamma^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi(-x^\mu)\end{aligned} \tag{3.59}$$

となる．最後の変形においてはフェルミ統計による場の反可換性を用いた．ここで，$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$，$\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^\mu$ の性質を用いると $\gamma^0\gamma^5\Gamma^\dagger\gamma^0\gamma^5 = -(-1)^n\Gamma$ が得られる．ここで n は Γ におけるガンマ行列の個数（階数）である．例えば Γ が $\sigma^{\mu\nu}$ の場合には $n = 2$ である．こうして

$$(\mathcal{CPT})^{-1}\bar{\psi}(x^\mu)\Gamma\psi(x^\mu)\mathcal{CPT} = (-1)^n\bar{\psi}(-x^\mu)\Gamma\psi(-x^\mu) \tag{3.60}$$

という示すべき関係式が得られる．

CPT 定理の帰結として，先に $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合の例で述べたように，**CP 対称性の破れと T 対称性の破れは同値**である．実際，CP 対称性が破れている場合に T 対称性があったとすると CPT 変換の下で理論が不変でなくなり CPT 定理に反することになる．

更に CPT 変換すると粒子と反粒子は入れ替わるが，運動量 $\vec{p}$ は P, T 変換でそれぞれ符号を変えるので 4 元運動量 p^μ は CPT 不変である．よって $p^\mu p_\mu = m^2$ も不変になり，粒子 P と反粒子 $\bar{P}$ の質量は全く同じであることが分かる：

$$m(P) = m(\bar{P}). \tag{3.61}$$

もう一つの重要な帰結として，**粒子と反粒子の崩壊の寿命は同じ**である：

$$\Gamma(P) = \Gamma(\bar{P}). \tag{3.62}$$

こちらのほうは示すのが少々面倒であるが，直感的には次のように理解することができる．粒子 P がある終状態 f に崩壊する崩壊幅（“**部分崩壊幅**”）$\Gamma(P \to f)$ と反粒子 $\bar{P}$ が終状態で粒子と反粒子を置き換えた $\bar{f}$ に崩壊する部分崩壊幅 $\Gamma(\bar{P} \to \bar{f})$ は C および CP が破れていれば一般に等しくない．CPT 定理でこれらの崩壊確率を関係づけようとしても，T 変換のために $P \to f$ と $\bar{f} \to \bar{P}$ の遷移確率の間に関係がつくだけである．しかし崩壊の寿命の逆数である**全崩壊幅** $\Gamma(P), \Gamma(\bar{P})$ に関しては事情が異なる．即ち，この場合には可能なすべての終状態について確率を足し合わせるということは $\sum_f |\langle f|H_{int}|P\rangle|^2$ を考えることになり，完全性 $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$ を用いると，全崩壊幅は $P \to P$ および $\bar{P} \to \bar{P}$ という（H_{int} の 2 次の摂動による）遷移振幅に置き換わる．よってこの場合には始状態と終状態が同じになるので，CPT 変換でこれらの 2 つの過程の確率が直接関係づいて $\Gamma(P) = \Gamma(\bar{P})$ が帰結されることになる．

第 4 章

ヤン・ミルズ理論

4.1 ひな形としての QED

素粒子の標準模型は，素粒子の 4 つの相互作用のうち，重力相互作用を除く 3 つの相互作用を**ゲージ理論**の枠組みを用いて記述する理論である．その著しい特徴は，3 つの相互作用がいずれも（**局所**）**ゲージ対称性**の帰結として必然的に生じる（**ゲージ原理**）という点である．

このように，局所ゲージ対称性を持った理論であるゲージ理論においてゲージ対称性の帰結として相互作用（**ゲージ相互作用**と呼ばれる）が必然的に現れることを理解するために，まずは最も簡単でゲージ理論のひな形とも言える，電磁相互作用を記述する相対論的量子場の理論である**量子電気力学 (QED)** を考察しよう．

QED の理論に登場する素粒子は，**電子** e^- と電磁相互作用を媒介するゲージボソンである**光子 (photon)** γ の 2 つである．歴史的には，マクスウェル理論には光子を記述する**電磁場**（4 元電磁ポテンシャル A_μ）は当然最初から存在し，ゲージ対称性の存在は後で分かったことである．しかし，ここでは局所ゲージ対称性を指導原理とすることで逆に光子が必然的に導入され結果的に電磁相互作用が生じる，という立場から QED の理論を再考しよう．

まず，光子を導入せず電子のみでできた理論から出発する．光子が存在しないので電子はいっさい力を受けず “**自由粒子**” としてディラック方程式に従って運動する．電子の場であるディラック・スピノールを ψ とすると，**変分原理 (Euler–Lagrange 方程式)** によってディラック方程式を与えるラグランジアン（密度）は (3.19) に見られるように

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{4.1}$$

である．ここで m は電子の質量である．$\bar{\psi}$ に関する変分をとると**ディラック方程式**

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \tag{4.2}$$

が得られることが分かる．(4.1) は**大域的ゲージ変換 (global gauge transformation)**

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = e^{ie\lambda}\psi(x) \tag{4.3}$$

の下で明らかに不変になる（ここで電気素量 e を位相因子に都合上入れたが本質的ではない）．これは大域的ゲージ変換ではゲージ変換のパラメター λ が時空点 x^μ に依存せずに定数であるからである．しかし，相対論的には，すべての信号は光速を超えて伝わることはなく，すべての時空点でいっぺんに変換する大域的ゲージ変換よりは，λ が時空点に依存して徐々に変換する**局所的ゲージ変換 (local gauge transformation)**

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = e^{ie\lambda(x)}\psi(x) \tag{4.4}$$

を考えるほうが自然かもしれない．ラグランジアンのうちで，この変換の下で質量項は依然として不変であるが，運動項はもはや不変ではなくなる：

$$\bar\psi\, i\,\partial\!\!\!/\,\psi \quad \to \quad \bar\psi'\, i\,\partial\!\!\!/\,\psi' = \bar\psi\, i\,\partial\!\!\!/\,\psi - e(\partial_\mu\lambda)\bar\psi\,\gamma^\mu\,\psi. \tag{4.5}$$

そこで，局所的ゲージ不変性（対称性）を実現するために 4 元ポテンシャル（一般に**ゲージ場**と呼ばれる）A_μ を導入して**共変微分**を以下のように定義する．

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{4.6}$$

(4.1) における微分 ∂_μ を共変微分に置き換えて，電子のラグランジアンを

$$\mathcal{L}_e = \bar\psi(iD\!\!\!\!/ - m)\psi = \bar\psi\,\{(i\partial_\mu + eA_\mu)\gamma^\mu - m\}\,\psi \tag{4.7}$$

とし，A_μ が局所ゲージ変換の下で

$$A_\mu \quad \to \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda \tag{4.8}$$

と変換するものとすると，(4.7) はゲージ不変（ゲージ変換の下で不変）であることが容易に分かる：

$$\bar\psi\, i\, D\!\!\!\!/\,\psi \quad \to \quad \bar\psi'\, i\, D\!\!\!\!/\,'\psi' = \bar\psi'(i\partial_\mu + eA'_\mu)\gamma^\mu\psi' = \bar\psi\, i\, D\!\!\!\!/\,\psi. \tag{4.9}$$

本質的なことは，A_μ の導入によって ψ の微分が ψ と同じように，即ち**"共変的に" ゲージ変換する**ということである：

$$D\!\!\!\!/\,\psi \quad \to \quad D\!\!\!\!/\,'\psi' = e^{ie\lambda}D\!\!\!\!/\,\psi. \tag{4.10}$$

物理的には，$i\partial_\mu \ \to \ i\partial_\mu + eA_\mu$ の置き換えは，量子力学の対応原理から $p_\mu \to p_\mu + eA_\mu$ という置き換えに対応し，電磁場中の電子の運動を考える

ときに行う処方箋とちょうど同じである．つまり共変微分で導入された**ゲージ場 $\boldsymbol{A_\mu}$** は電磁場を記述する **4 元電磁ポテンシャル**に他ならないことが分かる．

こうして，局所ゲージ対称性を課すことでゲージ場 A_μ で記述される光子が導入され，その結果電磁相互作用が生じることになる：

$$\text{局所ゲージ対称性} \quad \longrightarrow \quad \text{ゲージボソン（光子）} \quad \longrightarrow \quad \text{電磁相互作用}.$$

このようにしてゲージ対称性を課すことで必然的にゲージ場が導入され，それを量子化した粒子であるゲージボソン（QED では光子）の交換によって相互作用が生じるという指導原理を「**ゲージ原理**」と言う．後述のように，標準模型の相互作用はすべてこのゲージ原理によって導かれることになり，その意味でも非常に重要である．

なお，仮に $e = 0$ とすると，(4.7) から分かるようにスピノール場 ψ で記述される粒子のゲージ相互作用は無くなるが，同時に場はゲージ変換をしないことになる（(4.4) 参照）．つまりゲージ変換の度合いが大きいほど相互作用も強くなるということが分かる．ここから特に教訓として学ぶべきことは，場がゲージ変換（大域的でよい）を受けるということは，その場で記述される粒子がゲージボソンを生成したり，ゲージボソンから力を受けるということ，即ち粒子がその**力の源 (source)** となるある種の "**電荷**" を持っている，ということである．逆に大域的ゲージ変換をしない粒子は "電荷" を持たず相互作用をしない．実際，(4.8) より電磁場は大域的ゲージ変換の下で変換しない（不変である）が，これは光子自身は電荷を持たないことを意味している．後で見るように，非可換ゲージ対称性に基づくヤン・ミルズ理論ではゲージボソンは "電荷" を持ち，そのためにゲージボソンにゲージボソンが結合する "**自己相互作用**" が可能となる．

ところで，変換 (4.4) の下でディラック・スピノール ψ の 4 成分はいずれも

$$z \quad \rightarrow \quad z' = e^{ie\lambda} z \qquad (|z'| = |z|) \tag{4.11}$$

のように複素数に関する位相変換として変換する．(4.11) のような複素数の絶対値を変えない変換の集合は数学的には $\boldsymbol{U(1)}$ という**リー群（連続群）**をなすと言える．この変換を**複素平面（ガウス平面）**上で表すと，z に対応するベクトルが角 $e\lambda$ の回転を受けることになるので，この $U(1)$ は 2 次元空間における回転のなすリー群である $\boldsymbol{SO(2)}$ **と同等**であると言える．角 α の回転と角 β の回転を続けて行うことを考えると，いずれの回転を先に行っても結果は角 $\alpha + \beta$ の回転になる．つまり 2 つの角の回転を表す行列を $M(\alpha)$, $M(\beta)$ とすると，

$$[M(\alpha),\ M(\beta)] = 0 \tag{4.12}$$

となり，群の要素は可換であることが分かる．こうした "**可換群**" を**アーベル群 (Abelian group)** と言う．こうして，QED は $U(1)$ 局所ゲージ変換の下

で不変な理論，即ち $U(1)$（局所）ゲージ対称性を持った理論であると言える．

しかし，このままでは QED はまだ完全ではない．電磁相互作用を媒介すべき光子が空間を伝搬できないのである．それは A_μ に関する微分項が存在しないためである．そこで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.13}$$

で定義される**場の強さ (field strength) テンソル**を考えると，ちょうどポテンシャルの勾配で表される力 $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ が保存力の条件 $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ を満たすのと同様に，$F_{\mu\nu}$ はゲージ変換 (4.8) の下で不変であることが分かる．ローレンツ不変な

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.14}$$

を考えると，これがちょうど光子の伝搬に必要な**運動項**であることが分かる．実際，(4.7), (4.14) の A_μ に関する変分をとると，ちょうど**マクスウェル方程式**が導かれることが分かる．

ここで後のヤン・ミルズ理論の議論において有用となる関係式を導いておこう．即ち，場の強さテンソルは共変微分の交換関係で表すことができる：

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - ieA_\mu, \partial_\nu - ieA_\nu] = -ieF_{\mu\nu}. \tag{4.15}$$

共変微分を用いているため，$F_{\mu\nu}$ も当然共変的に変換するはずである．実際

$$[D_\mu, D_\nu]\psi \quad \rightarrow \quad [D'_\mu, D'_\nu]\psi' = e^{ie\lambda}[D_\mu, D_\nu]\psi = e^{ie\lambda}[D_\mu, D_\nu]e^{-ie\lambda}\psi', \tag{4.16}$$

より，

$$F'_{\mu\nu} = e^{ie\lambda}F_{\mu\nu}e^{-ie\lambda} \tag{4.17}$$

という（斉次）変換が得られるが，実際には $U(1)$ が可換群であることから $e^{ie\lambda}F_{\mu\nu}e^{-ie\lambda} = F_{\mu\nu}$ となり，QED においては既に述べたように場の強さテンソルはゲージ不変である．しかし後述のように，非可換ゲージ対称性に基づくヤン・ミルズ理論では不変ではなくなり，(4.17) のように共変的に変換する．

4.2 共変微分，ゲージ場の幾何学的意味づけ

共変微分という概念はゲージ理論だけでなく**一般相対論**においても登場する．一般相対論ではベクトルの微分，即ち近接する 2 点でのベクトルの差を扱う際に，一方のベクトルを他方のベクトルの位置にまで**平行移動**して点をそろえることで，一般座標変換の下でベクトルと同じように（共変的に）変換する微分を定義する．これが共変微分である．普通平行移動においてはベクトルの成分

は変わらないが，一般座標系では異なる 2 点での局所的な基底ベクトルが異なるために，平行移動でベクトルの成分が線形変換を受ける．その変換を表す行列として現れるのが**接続係数（クリストッフェル記号）**であった．

実はゲージ場を用いた共変微分に関してもこれと同様な幾何学的な意味づけが可能であり，接続係数に対応するのがゲージ場 A_μ になる．ただし，大きな違いもある．一般相対論で扱うベクトルは時空間で定義されたベクトルである．しかし，ゲージ理論で扱うベクトルは，場（や波動関数）を表すものである．例えば QED の場合には，4 成分のディラック・スピノールの各成分は一般に複素数なので，**時空の各点毎に複素平面**を考え，その平面上のベクトルとして表すことができる．いわば時空の各点毎に，場を表現するための“**内部空間**”が存在しているという見方もできる．よって，平行移動も，ある点の内部空間上に存在するベクトルを近接する別の点の内部空間上に平行移動すると見なされる．内部空間に対し，通常の 4 次元時空間は“**外部空間**”と呼ばれる．

このように外部空間か内部空間かという違いはあるが，それを除くと非常に密接な関係があることが分かる．一般相対論ではリーマンの曲率テンソルが接続係数の微分を用いて表される．同様にゲージ場の微分で得られる場の強さテンソル $F_{\mu\nu}$ はいわば**内部空間における“曲率”**を表していることになる．

それでは，実際にどのようにしてゲージ場が幾何学的に理解されるのかを見てみよう．ゲージ理論のひな形として先に議論した QED を考えよう．時空の無限小の距離だけ離れた 2 点 $\mathrm{P}(x^\mu)$, $\mathrm{Q}(x^\mu + dx^\mu)$ を考える．ゲージ変換の下で電子を表すスピノールの 4 つの成分は皆同じように位相変換を受けるので，1 つの成分のみに注目し，その P, Q における値（複素数）を P, Q それぞれの点に置いた複素平面（内部空間）上の 2 成分ベクトル $\vec{V}_P(x^\mu)$, $\vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu)$ で表す．局所ゲージ変換では P, Q での位相変換は独立に行われる．即ち P, Q に置いた 2 つの複素平面の座標軸（実軸，虚軸）はゲージ変換で独立に回転し，それに伴って $\vec{V}_P, \vec{V}_Q$ もそれぞれ独立に回転を受ける：

$$\begin{aligned} \vec{V}_P(x^\mu) \quad &\to \quad \vec{V}'_P(x^\mu) = O(x^\mu)\vec{V}_P(x^\mu), \\ \vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu) \quad &\to \quad \vec{V}'_Q(x^\mu + dx^\mu) = O(x^\mu + dx^\mu)\vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu). \end{aligned} \tag{4.18}$$

ここで $O(x^\mu)$, $O(x^\mu + dx^\mu)$ は P, Q における局所ゲージ変換による回転を表す直交行列である．

ラグランジアンの運動項には偏微分がある．P 点における偏微分は $\vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu) - \vec{V}_P(x^\mu)$ という差分を考えることと同等であるが，問題は，この差のゲージ変換は (4.18) から分かるように P, Q で変換性が異なるために，$O(x^\mu)$, $O(x^\mu + dx^\mu)$ のどちらかの行列による回転と見なすことはできない．つまり場の偏微分は元の場と同じように（共変的に）はゲージ変換しないことになり，

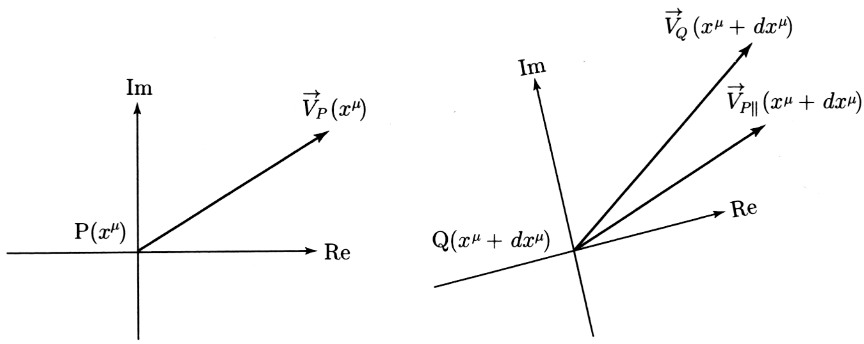


図 4.1 内部空間における複素場を表すベクトルの平行移動と共変微分.

したがってラグランジアンは局所ゲージ変換の下で不変でなくなってしまう．そこで，一般相対論でも行うように，P で定義されているベクトル $\vec{V}_P(x^\mu)$ を Q に**平行移動**することを考える．普通は，平行移動においてベクトルの成分は変わらないが，上述のように P, Q で内部空間の座標系がずれているので，$\vec{V}_P(x^\mu)$ を Q に平行移動して得られるベクトルを Q での座標系で見たときの成分を $\vec{V}_{P\parallel}(x^\mu + dx^\mu)$ と書くと，これは $\vec{V}_P(x^\mu)$ を回転した形で表される（図 4.1 参照）．

例えば Q の座標系が P の座標系に対して角 $d\theta$ だけ回転したものであれば，ベクトルの成分は角 $-d\theta$ だけ回転を受けることになる．P, Q は無限小 dx^μ だけずれているので，ずれの角は dx^μ に比例するはずである．この比例定数を A_μ と書けば $d\theta = A_\mu dx^\mu$ なので

$$\vec{V}_{P\parallel}(x^\mu + dx^\mu) = W(P \to Q)\vec{V}_P(x^\mu), \qquad W(P \to Q) = e^{iA_\mu dx^\mu \sigma_2} \tag{4.19}$$

と書ける．ここで**パウリ行列** σ_2 は 2 次元平面の回転の群 $\boldsymbol{SO(2)}$ **の生成子**である．また $W(P \to Q)$ は内部空間で有限の距離だけ平行移動するときに現れる "Wilson line" において移動距離を無限小にしたものと見なすことができる．

こうして平行移動して得られるベクトルと元々 Q に存在する $\vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu)$ との差をとると（図 4.1 参照），

$$\begin{aligned}
&\vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu) - \vec{V}_{P\parallel}(x^\mu + dx^\mu) \\
&= \vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu) - W(P \to Q)\vec{V}_P(x^\mu) \\
&= \vec{V}_Q(x^\mu + dx^\mu) - \vec{V}_P(x^\mu) - iA_\mu dx^\mu \sigma_2 \vec{V}_P(x^\mu) \\
&= (\partial_\mu - iA_\mu\sigma_2)\vec{V}_P\, dx^\mu \equiv (D_\mu \vec{V}_P)\ dx^\mu
\end{aligned} \tag{4.20}$$

となる．ここで定義された

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu\sigma_2 \tag{4.21}$$

が (4.6) で導入した共変微分に他ならない．一見 (4.6) と違う形に見えるが，複素平面上の 90 度回転が虚数単位に相当すること ($-i\sigma_2 \to i$)，またゲージ相互作用の強さを表す "**ゲージ結合定数**"（QED だと電気素量 $-e$）を考慮して $A_\mu \to -eA_\mu$ と置き換えてみると，複素場については

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \tag{4.22}$$

を作用させることと同等となり (4.6) と一致することが分かる．(4.20) が共変微分であると言えるのは，Q という同一点での 2 つのベクトルの差をとっているので，そのゲージ変換は点 Q での場そのものの変換と同じになるからである：

$$D_\mu \vec{V}_P \quad \to \quad D'_\mu \vec{V}'_P = O(x^\mu + dx^\mu) D_\mu \vec{V}_P. \tag{4.23}$$

ここで，無限小量 dx^μ を無視すれば $O(x^\mu + dx^\mu)$ は点 P でのゲージ変換 $O(x^\mu)$ で置き換えてよい．(4.23) において $D'_\mu = \partial_\mu - iA'_\mu \sigma_2$ はゲージ場も $A_\mu \to A'_\mu$ と変換することを表しているが，ではゲージ場の変換はどのように与えられるであろうか．上述のようにゲージ場は座標系のずれの角度に相当するので，P, Q でのゲージ変換の角度の差に相当するだけ変換する必要がある．実際，(4.19) より $\vec{V}_{P\parallel}(x^\mu + dx^\mu)$ は Q 点でのゲージ変換に従って変換するので，$W(P \to Q)$ の変換は

$$W(P \to Q) \quad \to \quad W'(P \to Q) = O(x^\mu + dx^\mu) W(P \to Q) O(x^\mu)^{-1} \tag{4.24}$$

で与えられる．これから dx^μ の 1 次まで展開すると，ゲージ場の変換性が

$$A'_\mu \sigma_2 = -i(\partial_\mu O)O^{-1} + O(A_\mu \sigma_2)O^{-1} \tag{4.25}$$

と決まる．実際には，今考えている QED のゲージ群が $U(1)$ という可換群であるので，（大域的ゲージ変換に対応する）斉次変換を表す右辺 2 項目は $A_\mu \sigma_2$ で不変となり，O の回転角を λ と書くと $A'_\mu \sigma_2 = -(\partial_\mu \lambda)\sigma_2 + A_\mu \sigma_2$，即ち

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \tag{4.26}$$

が得られる．これは $\lambda \to e\lambda$, $A_\mu \to -eA_\mu$ の置き換えをすると (4.8) とちょうど一致することが分かる．

一般相対論では，同様な議論で共変微分が $D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda$ と接続係数 $\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ を用いて書かれる．これから**ゲージ場は接続係数に対応**することが分かる．

さて，一般相対論では接続係数の偏微分によって**リーマンの曲率テンソル $\boldsymbol{R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}}$** が得られる．よってゲージ場の微分で得られる**場の強さテンソル $\boldsymbol{F_{\mu\nu}}$** が，行列表示すると $F_{\mu\nu}(\sigma_2)_i{}^j$ のように 4 つの添字を持つこともあり曲率に対応すると予想される．即ち電磁場は内部空間における曲率を表しているという

ことになる．

場の強さテンソルを曲率と意味づける議論の詳細は紙面の関係で省略するが，(4.15) と同様な関係が一般相対論でも存在することだけをここでは議論することにしよう．一般相対論では時空が曲がっていることを端的に表す事実として，ある点 P に存在するベクトルを別の点 Q まで異なる径路に沿ってベクトルを平行移動した際に，移動先のベクトルが一致せず，ずれが生じるという事実がある．例えば時空座標 x^μ の μ の方向の微小な線分に沿って平行移動してから ν 方向の微小な線分に沿って平行移動した場合と，μ, ν の順番を入れ替えて平行移動した場合の差は，共変微分が平行移動に深く関係していることから，μ 方向，ν 方向の共変微分 D_μ, D_ν の交換関係で表されることが期待される．即ち，リーマンの曲率テンソルは $[D_\mu, D_\nu]$ で与えられると期待されるが，実際，例えば共変ベクトル V_μ に関しては

$$[D_\mu, D_\nu]V_\lambda = R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}V_\kappa \tag{4.27}$$

という関係があることが知られている．これは確かに (4.15) と同様な関係であると言える．ゲージ場についても $\mathcal{A}_\mu \equiv A_\mu\sigma_2$，$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}\sigma_2$ と行列表示すると，(4.15) は (4.21) より $D_\mu = \partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu$ なので

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu - i[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \tag{4.28}$$

と書かれる．実際には $U(1)$ ゲージ理論では $[\sigma_2, \sigma_2] = 0$ なので (4.28) の右辺の最後の項は効かず，結局

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.29}$$

となって (4.13) で定義される場の強さテンソルが得られることになる．しかし，後の**ヤン・ミルズ理論**（**非可換ゲージ理論**）の議論のときに見られるように，ゲージ群が非可換群の場合には (4.28) の右辺の交換関係の部分も残り，これがヤン・ミルズ理論に特有な**ゲージボソンの自己相互作用**を生じるのである．

まとめると，ゲージ理論と一般相対論の間の対応関係は

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{A}_\mu)_i{}^j, \qquad R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{F}_{\mu\nu})_i{}^j \tag{4.30}$$

となる．こうした対応関係の背後にある事実は，ゲージ対称性も一般座標変換不変性も共に**局所的な対称性**であるということである．一方で，ゲージ理論と一般相対論の間には大きな違いもある．例えばリーマンの曲率テンソルの 4 つの添字はいずれも時空（外部空間）の成分を表すが，場の強さテンソルに関しては，4 つの添字のうちの 2 つ (i, j) は内部空間の添字であり，リーマンの曲率テンソルの場合のようにすべての添字の縮約をとってスカラー曲率を作るといったことはできないのである．実際，アインシュタイン方程式を導くアインシュタイン・ヒルベルト作用 $\int d^4x\sqrt{-g}\,R$（R：スカラー曲率）は，(4.14) をラグランジアン密度とするゲージ場の作用とは大きく異なる．

4.3 $SU(n)$ ヤン・ミルズ理論

4.1 節でゲージ理論のひな形として QED を議論した．ここではこの議論を**非可換群 $SU(n)$**（n: 2 以上の自然数）のゲージ変換（“ゲージ群”）の下での不変性，即ちゲージ対称性を持った**非可換ゲージ理論**（提唱者の名前に因んで**ヤン・ミルズ (Yang–Mills) 理論**と呼ばれる）の場合に拡張することを考える．その際，4.2 節の幾何学的イメージに基づく議論は特に可換な群を想定して議論していないので，群の生成子を σ_2 から一般の場合に置き換えることで，拡張は容易に行うことができる．特別な場合として $n = 2, 3$ の場合，即ち $SU(2)$, $SU(3)$ は標準模型において弱い相互作用，強い相互作用を記述するゲージ対称性であり現実的にも重要である．

まずは，理論の設定から始めよう．ゲージ場は，ゲージ対称性を $SU(n)$ と決めれば一意的に導入され，$n^2 - 1$ 個必要となる．これは群の独立な変換の数，即ち生成子の数である群の次元に他ならない．(4.19) の $W(P \to Q)$ はゲージ群 $SU(n)$ の元なので，その指数部分は $n^2 - 1$ 個の生成子の線形結合で書かれ，その係数が $n^2 - 1$ 個の独立なゲージ場になるのである．また，QED のときの電子に当たる，物質を表す “**物質場**” としては，$SU(n)$ の**基本表現**（n 次元表現）に属する n 個のディラック・スピノールを導入する：

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Ψ の $SU(n)$ ゲージ変換は

$$\Psi \quad \to \quad \Psi' = U\Psi, \qquad U = e^{ig\lambda^a T^a} \tag{4.32}$$

で与えられる．ここでユニタリー行列 U は $SU(n)$ の元であり，群の元は微小変換を記述する**生成子 (generator) $\boldsymbol{T^a}$** $(a = 1, \ldots, n^2 - 1)$ と変換の（実）パラメター λ^a を用いて表される．群が $SU(n)$ の場合には $\det U = 1$ の条件より

$$\log(\det U) = \mathrm{Tr}(\log U) = ig\lambda^a \mathrm{Tr}\, T^a = 0 \quad \to \quad \mathrm{Tr}\, T^a = 0 \tag{4.33}$$

が得られるので，生成子 T^a は**エルミート**でトレースが 0 (**traceless**) の $n^2 - 1$ 個の独立な行列である．$n = 2$ 即ち $SU(2)$ の場合だと，生成子は単に 3 つの**パウリ行列**を用いて

$$T^a = \frac{\sigma_a}{2} \tag{4.34}$$

で与えられる．ただし，生成子に関しては “規格直交条件”

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{4.35}$$

を課すことにする．

局所ゲージ変換の下で不変な理論を作るためには前節で議論したように，共変微分

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu - igA_\mu^a T^a)\Psi \tag{4.36}$$

を導入すれば良い．ここで QED における共変微分 (4.21) の 1 つだけの生成子 σ_2 を n^2-1 の生成子の和に拡張している．また，ここでは QED のときの e に当たる実パラメター g を導入している．これは e と同様に，ゲージ場 A_μ^a が仲介するゲージ相互作用の強さを表すことになるので「**ゲージ結合定数**」と呼ばれる．

共変微分が共変的に変換するためには，ゲージ場は (4.25) において $A_\mu\sigma_2 \to gA_\mu^a T^a$ と置き換えることによって

$$gA'_\mu = -i(\partial_\mu U)U^\dagger + U(gA_\mu)U^\dagger \tag{4.37}$$

と変換すればよいことが分かる．ただし，ここで簡単のために $n \times n$ 行列 A_μ を

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \tag{4.38}$$

として定義した．(4.37) は，(4.36) が共変的に変換すべし，という条件から直接導くこともできる．次の例題を参照のこと．

例題 4.1 スピノール場 Ψ の共変微分が局所ゲージ変換の下で共変的に変換すべしという条件から，ゲージ場のゲージ変換 (4.37) を導きなさい．

解 共変的に変換すべしという条件は

$$D_\mu\Psi \quad \to \quad D'_\mu\Psi' = D'_\mu U\Psi = U(D_\mu\Psi) \tag{4.39}$$

と書かれる．これから

$$\begin{aligned} & D'_\mu = UD_\mu U^\dagger \\ \to \quad & \partial_\mu - igA'_\mu = U(\partial_\mu - igA_\mu)U^\dagger \\ \to \quad & gA'_\mu = -i(\partial_\mu U)U^\dagger + U(gA_\mu)U^\dagger \end{aligned} \tag{4.40}$$

が得られるが，これは (4.37) と同じである．なお，この変形において $\partial_\mu(UU^\dagger) = (\partial_\mu U)U^\dagger + U(\partial_\mu U^\dagger) = 0$ を用いた． □

ここで (4.37) のゲージ変換は QED の場合とは質的に大きく異なる性質を持っていることに注意しよう．即ち，ゲージ変換を大域的変換（U が時空座標

に依らない定数行列）の場合に限定しても，QED の場合とは異なり行列は一般には互いに交換しないので $U(gA_\mu)U^\dagger \neq gA_\mu$ であり，ゲージ場が**大域的ゲージ変換の下でも変換**するのである：

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad A'_\mu = UA_\mu U^\dagger. \tag{4.41}$$

この変換性は，量子力学でおなじみのものである．量子力学では基底の U によるユニタリー変換の下で，任意の演算子 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^\dagger$ のように変換する．数学的には (4.41) の変換は，群の生成子そのものの表現である "**随伴表現 (adjoint representation)**" の変換性に他ならない．

物理的には (4.41) の変換性は 4.1 節でコメントしたように，ゲージ場がいわば "電荷を持っている" ことを言っている．ただし，"電荷" というのは語弊があり，ゲージボソンが媒介する各ゲージ相互作用の源 (source) となる量子数を持つということである．典型的にはクォークの持つカラー（3 色）が挙げられる．強い相互作用はカラーを源として生成されるグルーオンの交換によって生じるが，この**グルーオン**自身がいわばカラーを持ち得るということである．例えば青 B のカラーのクォークを赤 R のクォークに変える働きを持つグルーオンは，それ自身 $R\bar{B}$（$\bar{B}$ は青 B の "補色"）のようなカラーを持つので，このグルーオンに他のグルーオンが結合する，**自己相互作用 (self-interaction)** が存在することになる．QED の場合には光子自身は電荷を持たず，こうした自己相互作用は無いので，これは非可換ゲージ理論であるヤン・ミルズ理論の大きな特徴と言える．

共変微分を導入してしまえば，フェルミオンのゲージ相互作用を含めたゲージ不変なラグランジアンは，見かけ上は QED と全く同様に

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi = \bar{\Psi}\left\{(i\partial_\mu + gA_\mu)\gamma^\mu - m\right\}\Psi \tag{4.42}$$

で与えられる．ここで $\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_n)$．ただし，QED のときと大きく違うのは A_μ が (4.38) に見られるように行列であり，$n^2 - 1$ 個のゲージ粒子を含んでいるということである．また，これに含まれる生成子には非対角行列も含まれるので，ゲージ相互作用によって $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ といったようなフェルミオン間の遷移も起きる．こうした性質は，例えば弱い相互作用によるベータ崩壊における $d \rightarrow u$ というクォークの遷移過程を表すのに適している．なお $\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}U^\dagger U\Psi = \bar{\Psi}\Psi$ なので，(4.42) において m に比例した質量項は自動的にゲージ不変になっているので付け加えることができる．

次にゲージボソンの運動項を記述すべく，ゲージ場から構成される場の強さテンソルを求めてみよう．これについても前節の (4.28) と同様に，$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T^a$ として

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{4.43}$$

のように場の強さテンソル $F^a_{\mu\nu}$ $(a = 1, 2, \ldots, n^2 - 1)$ を定義できる．非可換群の特徴として右辺最後の交換関係 $[A_\mu, A_\nu]$ の項が残ることになるが，この項の存在が先に議論したような非可換ゲージ理論の特徴であるゲージボソンの自己相互作用を引き起こすことになる．(4.43) を各成分 $F^a_{\mu\nu}$ に関して具体的に書くと

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{4.44}$$

となる．ここで f^{abc} は**群の構造定数**と呼ばれる各リー群の性質を規定する重要な定数で

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \tag{4.45}$$

で定義される．

場の強さテンソルは QED では電場・磁場を表しゲージ不変であった．しかし，ヤン・ミルズ理論ではゲージ場が (4.41) のように大域的ゲージ変換の下でも変換するように，場の強さも同様に

$$F_{\mu\nu} \quad \to \quad F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger \tag{4.46}$$

と変換することが分かる．これを以下の例題で確かめよう．

例題 4.2 場の強さテンソルが，実際に (4.46) のように変換することを確かめなさい．

解 基本表現 ψ に共変微分の交換関係を作用させた $[D_\mu, D_\nu]\psi$ を考える．共変微分は（何度作用させようと）局所ゲージ変換の下でも共変的に変換するのであるから，その変換性は

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi \quad \to \quad [D'_\mu, D'_\nu]\psi' &= U[D_\mu, D_\nu]\psi = U[D_\mu, D_\nu]U^\dagger U\psi \\ &= U[D_\mu, D_\nu]U^\dagger \psi'\end{aligned} \tag{4.47}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D'_\mu, D'_\nu] \\ &= \frac{i}{g}U[D_\mu, D_\nu]U^\dagger = U F_{\mu\nu} U^\dagger\end{aligned} \tag{4.48}$$

が得られ，題意は示された． □

$F_{\mu\nu}$ が QED のときのようにゲージ変換の下で不変でなくても，(4.48) のように共変的に変換するのであれば，ゲージ不変なゲージ場の運動項を

$$\mathcal{L}_{gk} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{4.49}$$

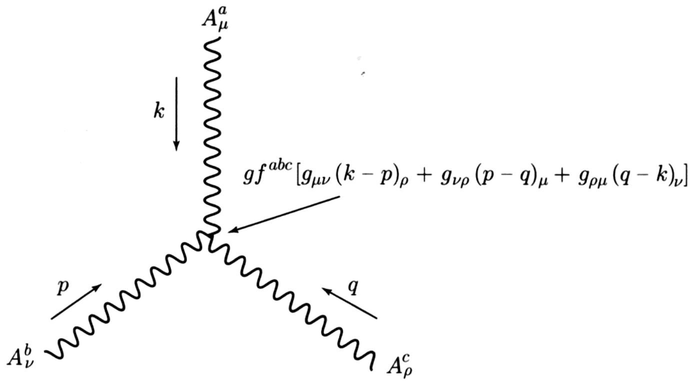


図 4.2　ゲージボソンの自己相互作用を表す 3 点頂点のファインマン則.

として得ることができる．(4.49) がゲージ変換 (4.48) の下で不変であることはすぐ確認できるであろう．これを各ゲージ場 A^a_μ を用いて具体的に書けば，(4.35), (4.44) より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gk} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)\times \\ &\quad (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{ab'c'}A^{b'\mu}A^{c'\nu}) \end{aligned} \tag{4.50}$$

となる．ここで f^{abc} が 3 つの添字に関して完全反対称であることを用いた．

(4.50) は，ゲージ場の運動項のつもりで作ったのであるが，実際にはゲージ場 A^a_μ の 2 次式のみならず，3 次式および 4 次式をも含むことが分かる．これらの項はファインマン図で表せば明白なように，ゲージ場どうしの相互作用，即ち**ゲージ場の "自己相互作用"** の存在を表している．これは，前から指摘しているように，ゲージ場がいわば "電荷を持っている" ためにゲージ場自身にゲージ場が結合できることから生じる．

それでは，次にゲージ場の 3 次式により生じる **3 点相互作用**に関するファインマン則を求めてみよう．基本的にはファインマン則は単に相互作用ラグランジアンの演算子の係数に i を掛ければ得られる．ゲージボソンの 3 点頂点のファインマン則も基本的には同じであるが，相互作用項に微分が入っていたり同種粒子が複数ある場合に特有の面倒な面があるので，少し注意が必要である．3 点頂点のファイマン則は図 4.2 のようであることが分かるが，次の例題でこれを導いてみよう．

例題 4.3　ゲージボソンの 3 点頂点のファインマン則が図 4.2 に示されたものになることを示しなさい．

解　まず $\mathcal{L}_{gk}$ のうちで 3 点相互作用に関係する部分を抜き出すと，群の構造定

数 f^{abc} が 3 つの添字に関して完全反対称であることを考慮すると，

$$-gf^{a'b'c'}(\partial_{\mu'}A^{a'}_{\nu'})A^{b'\mu'}A^{c'\nu'} \tag{4.51}$$

となる．図 4.2 は，それぞれ 4 元運動量 k, p, q（正確には k^μ 等）を持ったゲージ場 A^a_μ, A^b_ν, A^c_ρ が時空の一点で，(4.51) の相互作用項によって消滅させられることを示している．その際，a', b', c' のどの場の演算子が a, b, c のどのゲージボソンを消滅させるかについて，場合の数が 6 通りあるので，図 4.2 のように 6 個の項が現れる．例えば $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ の場合を考えよう． この場合 $A^{a'}_{\nu'}$ の 4 元運動量は k となり，したがって $\partial_{\mu'}$ の偏微分は $A^{a'}_{\nu'}$ 中の消滅演算子に伴って現れる $e^{-ik\cdot x}$ に作用するので $-ik_{\mu'}$ を掛けるのと同じである．また，$\nu' = \mu = \rho$, $\mu' = \nu$ となる．よって，この場合の 3 点頂点への寄与は $i(-g)f^{abc}(-ik_\nu)g_{\mu\rho} = -gf^{abc}k_\nu g_{\mu\rho}$ となる．他の場合についても同様にすると 3 点頂点は

$$gf^{abc}[g_{\mu\nu}(k-p)_\rho + g_{\nu\rho}(p-q)_\mu + g_{\rho\mu}(q-k)_\nu] \tag{4.52}$$

で与えられ，これが図 4.2 のファインマン則である． □

同様にして，4 点相互作用の頂点のファインマン則も求めることができる．結果のみを書くと A^a_μ, A^b_ν, A^c_ρ, A^d_σ の 4 点相互作用頂点のファインマン則は

$$\begin{aligned}&-ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\\&+ f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]\end{aligned} \tag{4.53}$$

となる．

こうして，結局ヤン・ミルズ理論のラグランジアン（密度）は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{gk}\\&= \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\end{aligned} \tag{4.54}$$

とコンパクトに書ける．見かけは QED と変わりないが，実際には，共変微分は行列で書かれていたり，$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ はゲージボソンの自己相互作用を含んでいたり，といった QED では見られないヤン・ミルズ理論特有の特性も持っていることに注意しよう．

第 5 章
素粒子の標準模型

素粒子の**標準模型**は**グラショウ・ワインバーグ・サラム** (S.L.Glashow, S.Weinberg, A.Salam) によって，元々電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に記述する“**電弱統一理論**”として，$\boldsymbol{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ という**ゲージ対称性**を持った理論として構築され（添字の L, Y の意味は追々説明する）．提唱当時はクォークは u, d, s の 3 つのみが入っていたが，その後理論的にチャームクォークの必要性が指摘され，更に**小林・益川**によって弱い相互作用における **CP 対称性の破れ**を説明するために 3 世代分のクォーク，レプトンが導入され今日の形に完成した．強い相互作用に関しては $SU(3)_c$（c はカラーを表す）ゲージ対称性を持ったヤン・ミルズ理論である**量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD)** によって記述されるので，これも含めて標準模型は $\boldsymbol{SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$ というゲージ対称性を持つ理論であると言えるが，QCD は電弱統一理論とは独立した取り扱いが可能なので，当面は $\boldsymbol{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ **電弱統一理論**に焦点を当てて議論する．なお強い相互作用まで含めた「**大統一理論**」に関しては 10 章で言及される．

5.1 $SU(2)_L$ の必要性

まずゲージ対称性として何故 $SU(2)$ が必要とされるかを考えてみよう．電弱統一理論のゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のうちで $U(1)$ は QED と同じで電磁相互作用に関係しそうであるので，おそらく，残りの $SU(2)$ が弱い相互作用を記述するであろうと予想される．実際には，こうした役割分担は完全ではないことが後で分かる．**弱い相互作用**の典型的な例は**ベータ崩壊**である．図 3.2 に見られるように，この崩壊はクォークレベルでの“素過程”で考えると $d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$ という素粒子反応であるが，場の演算子は粒子の消滅と反粒子の生成の両方の役割を果たすことからも分かるように，この反応の右辺の反ニュートリノを左辺に持って行ってニュートリノに変えた素粒子反応も可能で

ある．いわば，素粒子反応では“移項”が可能であり，その際符号を変える代わりに粒子・反粒子を入れ替えると思えばよい：

$$d + \nu_e \quad \rightarrow \quad u + e^-. \tag{5.1}$$

これは実際にニュートリノを核子に当てたときに起きる過程（歴史的には逆ベータ崩壊と呼ばれた“疑似弾性散乱 (quasi-elastc scattering)”）を表している．(5.1) ではクォークは $d \rightarrow u$ のように d, u の間で遷移し，またレプトンも $\nu_e \rightarrow e^-$ のように e^-, ν_e の間で遷移する．特に $d \rightarrow u$ という遷移は，ちょうどスピン $\frac{1}{2}$ の粒子において下向き (down) スピンの状態が上向き (up) スピンの状態に遷移するのとよく似ている．スピンの量子化軸を z 軸と考えれば，例えば x 軸方向の磁場をかけるとこうした遷移が起きるが，この遷移を引き起こす量子力学的なハミルトニアンは $\psi_P^\dagger \frac{\sigma_1}{2} \psi_P$ に比例する．ここで σ_1 はパウリ行列の一つであり，また ψ_P は，スピンが上向き，下向きの状態にある確率振幅を 2 つの成分とするパウリ・スピノールである．そこで，パウリ・スピノールと同様に u, d クォークを表すディラック・スピノールの場（クォークの名前を用いて単に u, d と書く）を 2 つの成分とするベクトル（**2 重項 (doublet)**）

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

を基本表現とする $SU(2)$ ヤン・ミルズ理論を考えることにする．共変微分は $SU(2)$ の場合の基本表現に関する生成子である 3 つのトレースがゼロの 2×2 エルミート行列，即ちパウリ行列 σ_a $(a = 1, 2, 3)$ を用いて

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma_a}{2} \tag{5.3}$$

のように表されるので，ゲージ場 $A_\mu^{1,2}$ が関与する相互作用により，ちょうど x, y 方向に磁場がかかったときのスピンの歳差運動と同様に $d \rightarrow u$, $u \rightarrow d$ といった遷移が可能になる．

レプトンについても (5.1) のように e^-, ν_e の間で遷移が起きるので，これらをペアにして 2 重項を構成することにする：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

(5.2) と同様に電荷の大きいほうのニュートリノを 2 重項の上のほうに置く．なお，ここまでクォーク，レプトンは 1 世代分のみ考えているが後ほど 3 世代の枠組みに拡張する．

ところで，ゲージ対称性は単なる $SU(2)$ でなく $SU(2)_L$ と書かれるが，その理由を見てみることにしよう．実は (5.2) のように 2 重項のメンバーをディラック・スピノールとすると共変微分 (5.3) による相互作用は現実の弱い相互作用を記述していないことが分かる．即ち，このままだと QED を $SU(2)$ に拡

張したようなものなので，**弱い相互作用なのにパリティーが破れない**ことになる．実際 $u = u_R + u_L$ のようにディラック・スピノールは右巻き，左巻きの両方の状態を同等に含むので，(5.3) によるクォークのゲージ場との相互作用は左右対称性を持つことになる．そこで，2 重項に現れるクォークをベータ崩壊に関与する左巻きの状態のみに限定し（**最大限の**）**パリティーの破れ**を実現することにする：

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \qquad L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L. \tag{5.5}$$

ここで，それぞれのフェルミオンのスピノールに L の添字を付けて u_L といった左巻きのワイル・フェルミオンを表す代わりに，2 重項全体に L を付けて表すことにする．即ち，標準模型の場合には理論を構成する基本的なフェルミオンはディラックではなく**ワイル・フェルミオン**にならざるを得ない．これはひとえにパリティーの破れの帰結であると言える．ただし，後で見るようにクォークと電荷を持ったレプトンは質量を持つ段階で右巻きと左巻きが足されて $u = u_R + u_L$ のように**ディラック・スピノール**を構成することになる．ニュートリノに関しては標準模型では質量がゼロと考えられていて左巻きの状態のままである．最近のニュートリノ振動の実験事実からニュートリノも小さいながら質量を持っていることが強く示唆されているが，ここでの標準模型に関する議論に関しては，質量は無視して左巻きのニュートリノのみが存在するものとしよう．

左巻きのフェルミオンは $SU(2)$ の 2 重項に組まれることが分かったが，右巻きのフェルミオンはどうであろうか．4.1 節の QED の解説の所で述べたように，大域的ゲージ変換をしない粒子は “電荷” を持たずゲージボソンとの相互作用が無いことになる．よって，ベータ崩壊の相互作用に関与しない右巻きのクォーク，レプトンは $SU(2)$ ゲージ変換をしない，即ちゲージ変換の下で不変な 1 重項だと考えるとよい．ちょうどスピン 0 の 1 重項の波動関数が空間回転の下で不変であるのと同様である：

$$u_R, \quad d_R, \quad e_R^-. \tag{5.6}$$

なお上で述べたように，ニュートリノに関しては標準模型では右巻きを導入しない．こうして，$SU(2)_L$ ゲージ相互作用は左巻きのフェルミオンにのみ存在することになり，それが添字 L の意味である．

4.3 節で一般的な $SU(n)$ ゲージ理論を議論したので，特に $n = 2$ と置けば標準模型の場合のラグランジアンが得られる．ただし，4.3 節での議論ではフェルミオンはディラック・フェルミオンであると考えていたが，標準模型では，右巻き，左巻きワイル・フェルミオンのそれぞれについてラグランジアンを書き，それらを足し合わせれば良い．一つ注意すべきことは，(4.42) では許された質量項は標準模型では許されないことである．重要なのは，共変微分で書かれ

る運動項と違い質量項は右巻きと左巻きのワイル・フェルミオンを混合させるということである．すると，2 重項と 1 重項の積は $SU(2)$ 不変ではない（スピン $\frac{1}{2}$ とスピン 0 の合成では 1 重項にはならないのと同じ）ので禁止されるのである．

こうしたことに注意して (4.42) を今の場合に適用して書くと，クォークに関しては

$$\mathcal{L}_q = \bar{Q}\left(i\partial_\mu + gA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)\gamma^\mu Q + \bar{u}_R\, i\,\partial_\mu\,\gamma^\mu\, u_R + \bar{d}_R\, i\,\partial_\mu\,\gamma^\mu\, d_R$$

$$= \bar{u}\, i\, \partial\!\!\!/ u + \bar{d}\, i\, \partial\!\!\!/ d + g\begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{d}\end{pmatrix} A_\mu^a \frac{\sigma_a}{2}\gamma^\mu L \begin{pmatrix}u \\ d\end{pmatrix} \tag{5.7}$$

となる．ここで，最終的にクォークは質量を持ちディラック・スピノール $u = u_R + u_L$ 等で表されることを見越して，ゲージ相互作用項もディラック・スピノールを用いて表し，その代わりに左巻きワイル・スピノールのみが関与することを表すために**射影演算子** $\boldsymbol{L = \frac{1-\gamma_5}{2}}$ を挿入している．ここで射影演算子は一方のフェルミオンにのみ作用させれば十分であることに注意しよう．即ち任意の 2 つのディラック・スピノールに対して $L^2 = L$ なので

$$\overline{(\psi_{1L})}\gamma^\mu \psi_{2L} = \overline{(L\psi_1)}\gamma^\mu L\psi_2 = \bar{\psi}_1 R\gamma^\mu L\psi_2 = \bar{\psi}_1\gamma^\mu L\psi_2 \tag{5.8}$$

が言える．ただし $R = \frac{1+\gamma_5}{2}$.

既に述べたように，左巻きの u, d クォークはいわばスピンが上向き，下向きの状態，つまりスピンの第 $3(z)$ 成分が $\pm\frac{1}{2}$ の状態に対応する．しかし，これはあくまで類推であり u, d の違いはフレーバーの違いであってスピンの違いではない．強い相互作用に関しては陽子，中性子が同等で対称的に相互作用を持つことを表すために，陽子，中性子は “アイソスピン” が $\pm\frac{1}{2}$ の状態であり，ちょうど空間回転対称性からスピン上向き，下向きが同等であるように，強い相互作用はアイソスピン “空間” の回転対称性 $SU(2)$ を持つと考えられた．クォークレベルでは u, d クォークがアイソスピンの第 3 成分が $\pm\frac{1}{2}$ の 2 重項をなすという言い方ができる．ヤンとミルズがヤン・ミルズ理論を作ったのは実はこの大域的対称性であるアイソスピン対称性を局所ゲージ対称性に拡張しようとしたものであった．

しかし，今扱っている $SU(2)_L$ 対称性は弱い相互作用に関する対称性なので，この対称性を “**弱アイソスピン (weak isospin)**” 対称性と呼んで区別することにする．本来のアイソスピン対称性とは異なり，弱アイソスピンに関しては (u, d) のペアだけでなく，後で述べる**第 2，第 3 世代**のクォークのペア $(c, s), (t, b)$ に関しても左巻きである限りすべて $SU(2)_L$ の 2 重項をなすことに注意しよう．

さて，(5.7) の左巻きのフェルミオンに関するゲージ相互作用項において，ゲージ場 A_μ^1，A_μ^2 は行列 σ^1，σ^2 と一緒に現れるので，$u \to d$ と $d \to u$ 両方の遷

移を同時に引き起こすことになる．即ち A_μ^1, A_μ^2 は弱アイソスピンの第 3 成分 I_3，つまり $\frac{\sigma^3}{2}$ の固有値を 1 変えたり，-1 変えたりするゲージボソンであり，それ自身の I_3 が確定していない．またアイソスピンだけでなく明らかに電荷 Q（Q：電気素量 e を単位とする電荷を一般に表す）も確定していない．そこで $u \to d$ と $d \to u$ のいずれかのみを引き起こし，したがって I_3 また電荷が -1 および 1 という確定した値を持つゲージボソンを考えることにする．即ち，量子力学におけるスピンの昇降演算子を $\sigma_\pm = \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{2}$ で定義するのに倣って

$$A_\mu^1\sigma^1 + A_\mu^2\sigma^2 = \sqrt{2}(W_\mu^+\sigma_+ + W_\mu^-\sigma_-),$$
$$W_\mu^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp iA_\mu^2}{\sqrt{2}} \tag{5.9}$$

と書き直す．すると，$W_\mu^\pm$ は $I_3 = Q = \pm 1$ を持つゲージボソンになる．これが $W_\mu^\pm$ と書く所以であり，これらは**電荷を持った弱ゲージボソン (charged weak gauge boson)** と呼ばれる．$W_\mu^\pm$ が $I_3 = \pm 1$ を持つことは，数学的には随伴表現の変換性を考慮して

$$\left[\frac{\sigma^3}{2}, \sigma^\pm\right] = \pm\sigma^\pm \tag{5.10}$$

という関係式で表現される．こうして (5.7) は次のように書き直される：

$$\mathcal{L}_q = \bar{u}\,i\partial\!\!\!/\,u + \bar{d}\,i\partial\!\!\!/\,d + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma^\mu L d W_\mu^+ + \bar{d}\gamma^\mu L u W_\mu^-)$$
$$+ \frac{g}{2}(\bar{u}\gamma^\mu L u - \bar{d}\gamma^\mu L d)A_\mu^3. \tag{5.11}$$

ここで，明らかに A_μ^3 は電気的に中性 ($Q = 0$) で $I_3 = 0$ のゲージボソンであることが分かる．

レプトンに関しても全く同様のラグランジアンが得られる：

$$\mathcal{L}_l = \bar{\nu}_e\,i\partial\!\!\!/\,L\nu_e + \bar{e}\,i\partial\!\!\!/\,e + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_e\gamma^\mu L e W_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu L \nu_e W_\mu^-)$$
$$+ \frac{g}{2}(\bar{\nu}_e\gamma^\mu L\nu_e - \bar{e}\gamma^\mu L e)A_\mu^3. \tag{5.12}$$

ただし，ニュートリノ ν_e に関しては運動項においても左巻きだけ存在することに注意しよう．

$SU(2)_L$ ゲージボソンに関するラグランジアンは (4.50) を単に $SU(2)$ ゲージ理論に適用したものでよく，$f^{abc} = \epsilon^{abc}$ なので

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \qquad (F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c) \tag{5.13}$$

となる．ここで $A_\mu^1 = \frac{W_\mu^+ + W_\mu^-}{\sqrt{2}}, A_\mu^2 = i\frac{W_\mu^+ - W_\mu^-}{\sqrt{2}}$ を用いれば $W_\mu^\pm$ に関するラグランジアンを容易に得ることができる．

5.2 $U(1)_Y$ の必要性

残念ながら，前節で導入した $SU(2)_L$ ゲージ対称性はベータ崩壊といった弱い相互作用を記述することはできても，電弱統一理論には至っていないことが分かる．一見，A^3_μ は電気的に中性のゲージボソンであるので，これを光子と見なせば電磁相互作用も含まれているように思われるが，しかしこの解釈には次のような問題点があることが分かる．

- P の破れ．
  $SU(2)$ 2 重項は左巻きのワイル・フェルミオンなので (5.11), (5.12) に見られるように A^3_μ の相互作用には左巻きのフェルミオンのみが現れ，したがって電磁相互作用が P を（最大限に）破ってしまうことになり現実に合わない．
- $Q(u) + Q(d) = Q(\nu_e) + Q(e^-) = 0$.
  A^3_μ を光子だとすると，そのゲージ結合定数 g を電気素量と見なす必要がある：$g = e$. また，フェルミオンの e を単位とする電荷を $Q(u)$ 等で表すと，$\mathrm{Tr}(\frac{\sigma_3}{2}) = 0$ より，2 重項をなす左巻きフェルミオンの電荷の平均値がゼロになってしまう：$Q(u) + Q(d) = Q(\nu_e) + Q(e^-) = 0$. 更には右巻きフェルミオンはゲージ相互作用をしないのでその電荷はすべてゼロとなってしまい現実と合わない．

こうした困難をどのように解決すればよいであろうか．上の議論で $\frac{\sigma_3}{2}$ の 2 つの固有値の差は 1 なので，2 重項におけるフェルミオンの電荷の差は正しく再現されていることに注意しよう：$Q(u) - Q(d) = Q(\nu_e) - Q(e^-) = 1$. よって，例えばクォークについては電荷を全体に "かさ上げ" してやれば現実を再現することになる．即ち，$Q(u)$, $Q(d)$ を固有値とする電荷の演算子を $Q = \mathrm{diag}(Q(u), Q(d))$ という 2×2 の対角行列で表すと，単位行列を I として

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma^3 + \frac{1}{6}I \tag{5.14}$$

が成り立つ．右辺で I に比例する部分の固有値（の 2 倍）を "**弱ハイパーチャージ (weak hypercharge)**" と呼び Y で表すことにすると，(5.14) の関係は，u, d クォークのそれぞれに対して

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{5.15}$$

の関係が成り立つことを意味する．(5.15) の関係はハドロンの性質の解析から生まれた**中野・西島・ゲルマンの法則** (2.3) と見かけ上全く同じ関係式であるが，ここでの I_3, Y は弱アイソスピン，弱ハイパーチャージを表していることに気をつけよう．(5.15) において右辺に単位行列に比例した部分が加わるということは $\frac{1}{2}I$ を生成子とし，したがって $SU(2)$ とは直積となる $U(1)$ ゲージ対

称性を新たに加える必要があることを意味する．単位行列は明らかにパウリ行列と可換であるが，これはこれらで生成される群の変換が独立で互いに影響を与えないことを意味する．これが直積の意味である．この $U(1)$ は弱ハイパーチャージを力の源とするゲージ対称性なので $U(1)_Y$ と書くことにする．こうして，標準模型の（電弱統一理論の部分の）ゲージ対称性（ゲージ群）は

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \tag{5.16}$$

となる．弱ハイパーチャージの値はクォークかレプトンか，また 2 重項か 1 重項かによっても変わる．それぞれのフェルミオンの持つ弱ハイパーチャージは (5.15) より容易に計算できて，次の通りである：

$$Q: \quad Y = \frac{1}{3}, \quad u_R: \quad Y = \frac{4}{3}, \quad d_R: \quad Y = -\frac{2}{3}, \tag{5.17}$$

$$L: \quad Y = -1, \quad e_R^-: \quad Y = -2. \tag{5.18}$$

$U(1)_Y$ ゲージ対称性の導入に伴いそのゲージ場 B_μ を導入し，また $U(1)_Y$ のゲージ結合定数を g' とする．ここで，$SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ は互いに独立なので，これらのゲージ結合定数 g, g' は独立なパラメターとして理論に導入されることに注意しよう．これが後で述べる**ワインバーグ角** $\boldsymbol{\theta_W}$ が理論的には決められない理由である．すると共変微分に，それぞれの素粒子の弱ハイパーチャージに比例した QED の場合と同様な項が加わることになる．作用するフェルミオンを一般に Ψ と書くと，(4.36) の処方箋に従い，共変微分は一般的に次のように書ける：

$$D_\mu \Psi = \left[\partial_\mu - i\left(g A_\mu^a T^a + g' B_\mu \frac{Y}{2}\right)\right]\Psi. \tag{5.19}$$

ここで，Ψ が $SU(2)_L$ 2 重項ならば $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ であり，1 重項であれば $T^a = 0$（$SU(2)$ ゲージ変換しないということ）とすればよい．例えばレプトンの 2 重項 (5.5) に関して具体的に書くと

$$D_\mu L = \left[\partial_\mu - i\left(g A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - \frac{1}{2} g' B_\mu\right)\right] L, \tag{5.20}$$

となる．

新たに導入されたゲージ場 B_μ は，同じ $U(1)$ ゲージ理論である QED と同様の運動項を持つ．(5.13) と合わせると，この理論のゲージ場の運動項（$SU(2)_L$ 部分に関しては自己相互作用も含むが）は以下のように与えられる．ただし $F_{\mu\nu}^a$ は (5.13) に与えられている．また $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \tag{5.21}$$

$U(1)_Y$ は電磁相互作用を正しく記述するために導入されたので，そのゲージボソン B_μ が光子に対応するように思われる．しかし，実際には光子は電気的

に中性な A_μ^3 と B_μ の線形結合の場で表されるのである．これは，電磁場は当然電荷を源として生成されるので，電荷の演算子 Q による 4 元カレントと結合するが，Q が (5.15) のように $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の生成子の線形結合で与えられることから当然であると言える．この議論を具体的計算で確かめてみよう．(5.21) のうちの運動項に関しては，電気的に中性のゲージ場 A_μ^3, B_μ の間の "回転"（直交変換）の下で不変である．そこで，2 重項についての共変微分のうちの A_μ^3 と B_μ の関わる部分を以下のように直交変換を行って書き直すことにしよう．

$$
\begin{aligned}
&gA_\mu^3\left(\frac{\sigma^3}{2}\right)+g'B_\mu\left(\frac{Y}{2}\right)\\
&=\left[g\cos\theta_W\left(\frac{\sigma^3}{2}\right)-g'\sin\theta_W\left(\frac{Y}{2}\right)\right]Z_\mu\\
&\quad+\left[g\sin\theta_W\left(\frac{\sigma^3}{2}\right)+g'\cos\theta_W\left(\frac{Y}{2}\right)\right]A_\mu.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

ここで Z_μ, A_μ は

$$
\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu\end{pmatrix}
\tag{5.23}
$$

で与えられる．直交変換の "回転角" $\boldsymbol{\theta_W}$ は**ワインバーグ角**あるいは**弱混合角 (weak mixing angle)** と呼ばれる．A_μ を光子と見なすと，それに結合する行列は eQ と見なされるはずである．即ち (5.15), (5.22) より，

$$
\begin{aligned}
&g\sin\theta_W\left(\frac{\sigma^3}{2}\right)+g'\cos\theta_W\left(\frac{Y}{2}\right)=eQ=e\left(\frac{\sigma^3}{2}+\frac{Y}{2}\right)\\
&\to\quad g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W=e.
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

これから

$$
\tan\theta_W=\frac{g'}{g},\qquad e=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}
\tag{5.25}
$$

も言える．仮に $\theta_W=0$ であれば光子は純粋に $U(1)_Y$ のゲージボソンとなるが，実験的にワインバーグ角は低エネルギーでほぼ

$$
\sin^2\theta_W\simeq 0.23
\tag{5.26}
$$

であることが分かっている．既に述べたが，(5.25) から分かるように標準模型では g, g' は独立なパラメターであるためにワインバーグ角を理論的に決めることはできない．電弱統一理論を 1 つの群（**単純群**）の下で記述できれば予言が可能になる．実際，重力を除く素粒子の 3 つの相互作用を統一する**大統一理論**のひな形である $\boldsymbol{SU(5)}$ **大統一理論**では，大統一が実現する非常な高エネルギー領域においてではあるが $\sin^2\theta_W=\frac{3}{8}$ と予言される．余談であるが，低エネルギーでの値 (5.26) は $\frac{3}{8}$ というよりはむしろ $\frac{1}{4}$ に近いが，これを予言する

完全に満足のいく理論は今のところ無いようである．

標準模型は，電磁相互作用と弱い相互作用の統一を目指したものであるが，その結果として，それまでに知られていなかった**新粒子**と，それに伴う**新しいタイプの相互作用**の存在を予言する．即ち，(5.23) に見られる光子と直交する電気的に**中性の弱ゲージボソン $\boldsymbol{Z_\mu}$** の存在と，それによって媒介される新しいタイプの弱い相互作用である．Z_μ は中性なので，それの結合するカレントも電磁相互作用と同様の電荷が変化しない "**中性カレント (neutral current)**" である．そこで，Z_μ によって引き起こされる過程を "**中性カレント過程 (neutral current process)**" と言う．これに対し $W_\mu^\pm$ が結合するカレントは $d \to u$ のように電荷の変化する "**荷電カレント**" なので，$W_\mu^\pm$ によって引き起こされる過程は "**荷電カレント過程 (charged current process)**" と呼ばれる．(5.22) の Z_μ に結合するカレントの部分を (5.25), (5.15) の関係を用いて少し変形すると，

$$g\cos\theta_W T^3 - g'\sin\theta_W\left(\frac{Y}{2}\right) = \frac{g}{\cos\theta_W}\left[T^3 - \sin^2\theta_W Q\right] \tag{5.27}$$

と書ける．T^3 の項は左巻きの 2 重項に対してのみ存在し，電磁相互作用に比例する電荷 Q の項は当然左右両方のカイラリティーに対し同等である．よって，任意のフェルミオンのディラック・スピノール f に対して，Z_μ に結合する中性カレントは

$$J_Z^\mu(f) = \frac{g}{\cos\theta_W}\bar{f}\gamma^\mu\left[I_3(f)L - \sin^2\theta_W Q(f)\right]f \tag{5.28}$$

と書ける．ここで $I_3(f)$, $Q(f)$ はフェルミオン f の（左巻きの場合の）アイソスピンの第 3 成分および電荷である．弱ハイパーチャージを用いずに，電荷と 2 重項の上か下かだけで表すことができて便利であるのと同時に，中性カレントには $SU(2)_L$ の部分だけでなく電磁相互作用の部分が混じった形になっていることが見てとれるようになっている．例えばニュートリノに関しては

$$J_Z^\mu(\nu_e) = \frac{g}{2\cos\theta_W}\bar{\nu}_e\gamma^\mu L\nu_e \tag{5.29}$$

となる．神岡鉱山に設置されたスーパーカミオカンデ検出器では，太陽や，大気で生成され飛来するニュートリノを，この中性カレントによるニュートリノと電子との弾性散乱によって電子が発するチェレンコフ光の測定により検出しているのである．

これまでの結果をまとめると，ラグランジアンはフェルミオンに関する部分 $\mathcal{L}_f$ とゲージボソンに関する部分 $\mathcal{L}_g$ の和であり（後でヒッグスに関する部分が加わる）

$$\mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g. \tag{5.30}$$

ここで

$$\mathcal{L}_f = \bar{u}\, i\partial\!\!\!/ u + \bar{d}\, i\partial\!\!\!/ d + \bar{\nu}_e\, i\partial\!\!\!/ L\, \nu_e + \bar{e}\, i\partial\!\!\!/ e$$
$$\qquad + W^+_\mu J^\mu_+ + W^-_\mu J^\mu_- + Z_\mu J^\mu_Z + A_\mu J^\mu_{EM}, \tag{5.31}$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \tag{5.32}$$

また，それぞれのカレントは次のように与えられる：

$$J^\mu_+ = \frac{g}{\sqrt{2}}[\bar{u}\gamma^\mu L d + \bar{\nu}_e \gamma^\mu L e], \quad J^\mu_- = \frac{g}{\sqrt{2}}[\bar{d}\gamma^\mu L u + \bar{e}\gamma^\mu L \nu_e], \tag{5.33}$$

$$J^\mu_Z = \frac{g}{\cos\theta_W}\left[\bar{u}\gamma^\mu \left(\frac{1}{2}L - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) u + \bar{d}\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) d\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,\bar{\nu}_e \gamma^\mu L \nu_e + \bar{e}\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2}L + \sin^2\theta_W\right) e\right], \tag{5.34}$$

$$J^\mu_{EM} = e\left[\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu\, u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu\, d - \bar{e}\gamma^\mu\, e\right]. \tag{5.35}$$

5.3 ヒッグスの必要性

ここまでは，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性が破れることなく存在する理論を前章で議論したヤン・ミルズ理論の構築法に基づいて構成してきた．しかし，ゲージ対称性がそのまま存在していると，この理論は次のような点で現実的な理論とはなり得ないことが分かる：

- ゲージボソンの質量.
  局所ゲージ対称性を持つ QED の場合と同様に，すべてのゲージボソンが質量を持てない．光子の質量はゼロで構わないが，2 章で述べたようにベータ崩壊のような弱い相互作用の到達距離が非常に短いのは相互作用を媒介するゲージボソン $W^\pm$ が大きな質量 M_W を持つために力の到達距離が（不確定性関係より）$1/M_W$ 程度になるからであると考えたいので，このままでは弱い相互作用を正しく記述することができない．そもそもゲージボソンが質量を持てないのは，例えば簡単な QED の例をとると，ゲージ場 A_μ のローレンツ変換の下で不変な質量 2 乗項 $M^2 A_\mu A^\mu$ が局所ゲージ変換 (4.8) の下で不変にならないからである ($A'_\mu A'^\mu \neq A_\mu A^\mu$)．よって，局所対称性を QED の対称性（これを $U(1)_Y$ と区別して $U(1)_{em}$ と書く）を除いて，何らかの方法で破る必要がある．
- クォーク，レプトンの質量.
  既に述べたように，標準模型ではクォーク，レプトンの質量項はゲージ不変ではなく，したがって許されないので，このままでは物質が質量を持つことができなくなる．それは，左巻きのフェルミオンが $SU(2)_L$ 2 重項であるのに対して右巻きのフェルミオンが $SU(2)_L$ 1 重項であるために，こ

れらの場の掛け算である質量項も $SU(2)_L$ 2 重項のように変換してしまって $SU(2)_L$ 不変にならないからである.

これらの問題点はいずれもゲージ対称性の帰結であるので，その解決のためには“何らかの方法”でこの対称性を破る必要がある．例えばゲージボソンの質量項を手で加えてゲージ対称性を“あからさまに破る (explicit breaking)”ことも考えられるが，すると理論が“**繰り込み可能**”でなくなり QED のような繰り込み可能な理論の長所である予言能力が失われる．

ここで繰り込み，**繰り込み可能性**に関してきちんと議論することはできないが，局所的相互作用を持つ理論においては相互作用が生じる時空の点（相互作用頂点）の間の距離がいくらでも小さくなり得るので，量子効果を計算する際に中間状態の運ぶ運動量が（不確定性関係から）いくらでも大きくなれることになる．このままだと物理量が発散（いわゆる紫外発散）してしまうので，この理論の適用限界である運動量のカットオフ Λ を導入し，最初に理論に入っている質量等のパラメター（“**裸のパラメター (bare parameter)**”）は $1/\Lambda$ 程度のミクロの世界での物理量であると考える．例えば電磁気の理論では電荷が媒質中に置かれると媒質において偏極が起こって電荷が**遮蔽 (screening)** されるので，本来の電荷は可能な限りミクロの世界で見たものに等しいはずである．なお，場の量子論では媒質が無くても量子論的効果で真空中でも“**真空偏極 (vacuum polarization)**”が起きる．こうした裸の物理量は実際に観測する物理量から真空偏極のような量子効果を考慮することで（Λ に応じて）決めることができる．繰り込み可能な理論の**予言能力**とは，このようにして一度裸のパラメターを決めると，他のすべての物理量への量子効果を有限値として予言できるという能力のことである．例えば電子やミューオンなどの**異常磁気能率**等の物理量に関する，量子効果の計算を用いた QED の予言は実験値と非常に良い精度で一致していて，こうした繰り込みの処方箋の有効性を示している．

こうした繰りこみ可能性を失うことのない“性質の良い”対称性の破れを実現するのが，正に南部教授のノーベル賞の対象業績である「**自発的対称性の破れ**」の機構である．これは理論そのもの，つまりラグランジアン自身はゲージ対称性を持っているが，理論の真空状態 $|0\rangle$ がゲージ変換の下で不変ではなく（即ち真空がゲージ対称性を破る），これによってゲージ対称性が破れるという機構である．真空状態ではスピンを持つ場は消えざるを得ない．そうでないと空間回転の下で真空の状態が不変ではなくなり，空間の回転対称性が失われるからである．例外はスピン 0 の**スカラー場**（擬スカラー場も含め）である．この場合あるスカラー場 ϕ が真空状態において 0 でない値 c (c : 定数) を持っても回転不変性は失われない．c は**スカラー場の真空期待値**とも見なせる : $\langle 0|\phi|0\rangle = c$. 実際には c はスカラー場のポテンシャルを最小にするスカラー場の値として決まる．実際，真空状態ではエネルギーが最低になるべきであるがハミルトニア

ン（密度）は運動項とポテンシャル項の和なので，スカラー場が定数でかつポテンシャルを最小にする場合が真空状態になる．このスカラーの真空期待値がゲージ変換の下で不変でなければ，ゲージ対称性が自発的に破れることになる．

こうして，標準模型ではスカラー場として**ヒッグス**と呼ばれる $SU(2)_L$ 2 重項を導入する：

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \qquad (Y = 1). \tag{5.36}$$

ただし，この場の弱ハイパーチャージは 1 とする．すると (5.15) より，2 重項の各要素の電荷は (5.36) に示したように決まる．ゲージ対称性を破るだけならばスカラー場は $SU(2)_L$ 2 重項に限定されないのであるが，2 重項を選んだ理由はゲージ不変な形でフェルミオンの質量を導くためである．即ち，ちょうどスピン $\frac{1}{2}$ どうしを合成してスピンが 0 の 1 重項を構成できるように，左巻きの 2 重項のフェルミオンとヒッグス 2 重項の掛け算で $SU(2)_L$ 不変な項を以下のように構成できるのである：

$$\bar{Q} H d_R. \tag{5.37}$$

ここでは，例として d クォーク質量を導く項を示した．(5.37) のような相互作用はフェルミオン 2 個とスカラー場の掛け算になっており **"湯川相互作用"** と呼ばれる．それは，核子 2 個とパイ中間子の場の掛け算で強い相互作用を記述する湯川理論との類推から来ている．(5.37) は場の演算子のみを書いているが，この前に係数を付けることができて**湯川結合**と呼ばれる．

このように導入したヒッグス場がヒッグス場に関するポテンシャルの最小化によって真空期待値を

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

のように持ったとしよう．すると，このような真空状態は $SU(2)_L$ ゲージ変換の下で不変ではなく，したがって $SU(2)_L$ ゲージ不変性は自発的に破れることになる：

$$e^{i\lambda^a \frac{\sigma^a}{2}} \langle H \rangle \neq \langle H \rangle \qquad (\lambda^a : SU(2)_L \text{変換のパラメター}). \tag{5.39}$$

これは，非対角行列 $T^{1,2} = \frac{\sigma^{1,2}}{2}$ による変換により真空期待値の位置が上側に変わってしまい，また $T^3 = \frac{\sigma^3}{2}$ による変換の下では $e^{i\lambda^3 \frac{\sigma^3}{2}} \langle H \rangle = e^{-\frac{i}{2}\lambda^3} \langle H \rangle \neq \langle H \rangle$ のように位相変換してしまうからである．ではゲージ対称性は完全に破れてしまうかと言うと，そうではない．それは T^3 と Y の線形結合である電荷の演算子 $Q = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2}\ (Y = 1)$ による変換の下では

$$e^{i\lambda^{em} Q} \langle H \rangle = e^{i\lambda^{em}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} \langle H \rangle = \langle H \rangle \tag{5.40}$$

となり不変であるからである．これは真空期待値を持つ ϕ^0 が電荷を持たないので当然である．こうしてゲージ対称性は

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \quad \rightarrow \quad U(1)_{em} \tag{5.41}$$

のように自発的に破れる．ここで $\boldsymbol{U(1)_{em}}$ は QED と同じ**電磁気のゲージ対称性**を表す．

5.4 自発的対称性の破れと南部・ゴールドストーンボソン

自発的対称性の破れはゲージ不変なスカラー場のポテンシャルの最小化により実現される．まずは最も簡単な $SO(2)$ モデルを用いて，そのエッセンスを見てみよう．

5.4.1 $\boldsymbol{SO(2)}$ 模型

一番簡単なゲージ理論の模型として "スカラー QED" を考えることができる．これは QED において電子の代わりに複素場 ϕ で表される電荷を持ったスカラー粒子を考える理論である．ゲージ変換は変換のパラメターを θ とする $U(1)$ 変換

$$\phi \quad \rightarrow \quad \phi' = e^{i\theta}\phi \tag{5.42}$$

であり，この下で不変なスカラーポテンシャルは

$$V = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \qquad (\mu^2,\ \lambda > 0) \tag{5.43}$$

で与えられる．ここで繰り込み可能性を課して ϕ の 4 次の項までに限定した．

説明の都合上，ここでは光子を表す電磁場 A_μ を無視し，また複素場であるスカラー場を実部，虚部を表す 2 つの実スカラー場 $\phi_{1,2}$ を用いて $\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$ と表すことにする．するとポテンシャルは

$$V = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 = \frac{\lambda}{4}\left\{(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\mu^2}{\lambda}\right\}^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \tag{5.44}$$

となる（図 5.1）．このポテンシャルは 2 次元平面上の回転と同じ $SO(2)$ 対称性を持つ．即ち $\phi_{1,2}$ 軸の回転による

$$\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}\phi_1' \\ \phi_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{5.45}$$

という変換の下でポテンシャルは明らかに不変である．

ポテンシャルの底の部分はすべて同等であるが，そのうちの一点，例えば

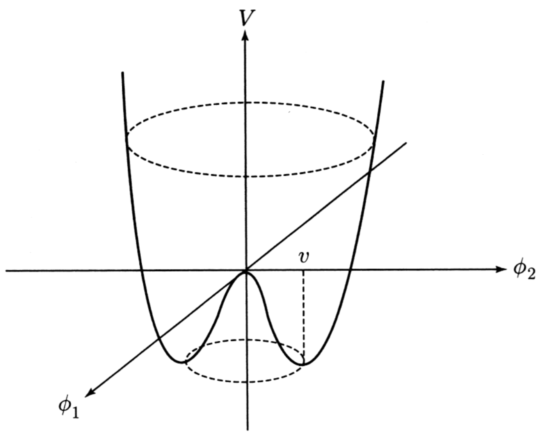


図 5.1 $SO(2)$ 模型におけるスカラーポテンシャル.

$$\begin{pmatrix} \langle\phi_1\rangle \\ \langle\phi_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \qquad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{5.46}$$

の位置に真空期待値を持ったとすると，それによって回転対称性は自発的に破れることになる．それは真空の状態のベクトル (5.46) に回転を行うとベクトルの終点がポテンシャルの底に沿って移動してしまうからである．このとき，終点の移動する方向 ((5.46) と直交する ϕ_1 方向) に対してはポテンシャルは一定で“平坦”なので，その方向の場は質量項を持たないことが予想される．実際，真空期待値の位置を原点とし，そこからのずれを $(G,\ h)$ として

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ v+h \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

と書き直すと，ラグランジアンは，場の 2 次の項まで書くと

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}(\partial_\mu G)(\partial^\mu G) - \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2 + \text{場の 3 次以上の項} \tag{5.48}$$

となり，確かに h が質量 $\sqrt{2\mu^2}$ を持つのに対して，ϕ_1 方向の場 G は**質量ゼロのスカラー粒子**になっていることが分かる．

もう少し一般的な言い方をすると，真空状態 $|0\rangle$ にゲージ群の変換を施した $e^{i\lambda^a T^a}|0\rangle$ を考えると，真空状態からずれるのは T^a のうちで（破れない対称性に相当する T^a に対しては真空は不変であるので）破れた対称性に相当する生成子の場合だけである．元のゲージ対称性を G，自発的な破れの後に残る対称性を H とすると，破れる対称性は数学的に G/H と書かれる．割り算のようであるが，生成子は指数関数の肩にあるので，G の生成子から H の生成子を引いた残りの生成子が，この破れた対称性に対応する．G/H の変換をすると，上の例で見られるようにポテンシャルの底を移動するので，G/H の独立な変換のそ

れぞれに対して質量ゼロのスカラー粒子が出現することになる．これが**ゴールドストーンの定理**と呼ばれるものである．即ち

> **ゴールドストーンの定理**
>
> **連続的な大域的対称性 G を持つ理論において G が自発的に H に破れたとすると，G/H の生成子の数だけの質量ゼロのスカラー粒子が出現する．**

というものである．(5.48) に見られるように今のところゲージ場は導入されておらず対称性は大域的対称性であることに注意しよう．出現する質量ゼロの粒子は「**南部・ゴールドストーン (NG) ボソン**」と呼ばれる．

5.4.2 標準模型の場合

こうした議論を標準模型の場合に適用すると，$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$ という自発的対称性の破れにおいて G の生成子は $3+1=4$ 個で H の生成子は $U(1)_{em}$ の 1 個なので，G/H の生成子の数は $4-1=3$ であり，3 個の NG ボソンが出現するはずである．具体的には，ヒッグス 2 重項を（$\phi^+ = G^+$ と書き直して）

$$H = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{v+h+iG^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

と書くと（h, G^0 は実場），h は真空期待値 v の方向の場であり，これが質量を持って物理的に残るヒッグス粒子を表す場である．当然 $\langle 0|h|0\rangle = 0$ である．一方で，残りの G^+, G^0 という，実場で数えて 3 個のスカラー場が NG ボソンである．

なお，標準模型の場合のゲージ不変なスカラーポテンシャルは

$$V = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda(H^\dagger H)^2 \qquad (\mu^2,\ \lambda > 0) \tag{5.50}$$

で与えられる．これは，繰り込み可能性を課した場合の最も一般的なゲージ不変なポテンシャルである．この最小化を行うと (5.49) の**真空期待値**は

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{5.51}$$

で与えられる．

上で議論したのは，真空期待値を決め，そこからのずれの場 (h, G^0, $G^\pm$) を新たに量子化された場と考えて理論を展開するというものであるが，多少形式的な感が無くもない．場の理論は無限個の連成振動子と同じ力学系であると考えられるので，こうした処方に関して，簡単な 1 個の調和振動子の場合に置き換えて考えてみることにしよう．以下の例題を参照されたい．

例題 5.1 質量 m，バネ定数が k の調和振動子を鉛直につるした．この調和振動子を量子化し，エネルギーレベルと真空における位置座標の期待値を求めなさい．

解 鉛直下向きに x 軸をとり，重力加速度を g としてラグランジアンを書くと

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V, \qquad V = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \tag{5.52}$$

となる．ポテンシャルは少し複雑で一見シュレディンガー方程式を解くことも難しそうである．しかし，物理的には重力により平衡点（力の釣り合いの位置）がポテンシャルの最小を与える $x_0 = \frac{mg}{k}$ の位置にずれるものの，そこを新たな原点として普通の単振動を行うであろう．実際，$x = x_0 + \tilde{x}$ としてラグランジアンを書き直せば

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\tilde{x}}^2 - \frac{1}{2}k\tilde{x}^2 + \frac{(mg)^2}{2k} \tag{5.53}$$

となり，定数項を除けば普通の調和振動子と全く同じラグランジアンになる．

よって，その量子化は通常の調和振動子と同じであり，エネルギーレベルは $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{(mg)^2}{2k}$ $(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$ となる．また，$\tilde{x}$ は通常の量子化の方法にしたがって昇降演算子を用いて $\tilde{x} \propto a + a^\dagger$ のように表され，当然 $\langle 0|\tilde{x}|0\rangle = 0 \leftrightarrow \langle 0|x|0\rangle = x_0$ である．上述の標準模型における議論も本質的に同じであり，$\tilde{x}$ がヒッグス場 h に対応する．h も $\tilde{x}$ と同様に通常の場の量子化の処方箋に従い生成・消滅演算子の線形結合で書け，したがって $\langle 0|h|0\rangle = 0$ となる．ただし，この例題のポテンシャルは特に何らかの対称性を持ったものではないので，これは自発的対称性の破れとは独立した議論であることに注意しよう． □

5.5 南部・ゴールドストーンボソンの非線形実現とゴールドストーンの定理

例えば $SO(2)$ 模型の場合の図 5.1 に見られるように，スカラーポテンシャルは通常 (ϕ_1, ϕ_2) という“直交座標系”を用いて記述され，また場の 4 次式である．こうした表示の仕方を“**線形実現**”と言う．しかし，**南部・ゴールドストーン (NG) ボソン**はポテンシャルの底に沿っての移動に対応する“振動モード”なので，直交座標ではなく“角度変数”を用いて表すほうが自然であるとも言える．つまりスカラー場は真空期待値やヒッグス場に対応する“動径方向”と，真空から破れた対称性に相当する生成子の作用で動く NG ボソンの“角度方向”に分解して表すことができる．例えば $SO(2)$ 模型の場合には (5.47) のスカラー場は極座標表示と同等の

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = e^{i\frac{G}{v}\sigma^2}\begin{pmatrix}0\\ v+h\end{pmatrix} \tag{5.54}$$

のように $SO(2)$ の生成子 σ^2 を用いて表すことができる．場 G が微小な場合には，場の 1 次までのオーダーで上式は (5.47) と一致する．この表示は G に関して非線形なので，NG ボソンの "**非線形実現 (non-linear realization)**" と呼ばれる．より一般的な例えば $SU(n)$ ゲージ群の場合にはスカラー場（群の基本表現に属するとする）ϕ は，真空期待値の方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ として

$$\phi = \frac{v+h}{\sqrt{2}}\, e^{2i\frac{G^{\hat{a}}}{v}T^{\hat{a}}}\,\vec{e} \tag{5.55}$$

のように表すことができる．ただし，$\hat{a}$ は自発的に破れた対称性 G/H に属する生成子のみをとるとする．

非線形表示を用いると，ラグランジアンにおいて NG ボソンは微分を伴ってしか現れず，これによりゴールドストーンの定理も導かれることが分かる．次の例題を参照されたい．

> **例題 5.2** ラグランジアンにおいて NG ボソンは微分を伴ってしか現れないことを示し，これによりゴールドストーンの定理を導きなさい．

解 スカラー場を (5.55) のように非線形実現を用いて書いたとしよう．次のような変換で NG ボソンを消去することを考えてみる．

$$\phi \quad \to \quad \phi' = e^{-2i\frac{G^{\hat{a}}}{v}T^{\hat{a}}}\phi = \frac{v+h}{\sqrt{2}}\,\vec{e}. \tag{5.56}$$

一見，この変換で NG ボソンは消えてしまうように思えるが，(5.56) の変換は場 $G^{\hat{a}}(x^\mu)$ を変換のパラメターとする一種の局所ゲージ変換と見なせ，また理論は大域的なゲージ対称性のみを持っていると考えているので，ラグランジアンはこの変換の下で不変ではない．しかし，ラグランジアンの変化分 $\delta\mathcal{L}$ は $G^{\hat{a}}$ が定数でないことにより生じるので $G^{\hat{a}}$ の微分に比例する形で書けるはずである（ここでは G は微小であるとする）：

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu G^{\hat{a}})j^{\hat{a}\mu}. \tag{5.57}$$

この議論はちょうど「ネーターの定理」の証明の際の議論と同様であり，$j^{\hat{a}\mu}$ は大域的対称性の帰結として導かれる保存する「ネーター・カレント」に他ならない．よって，NG ボソン $G^{\hat{a}}$ は，ラグランジアンにおいて常に微分に伴われて現れることになる．見方を変えると，理論には $G^{\hat{a}} \to G^{\hat{a}} + c$（$c$: 定数）という変換の下での不変性である "**シフト対称性**" が存在することになる．仮に NG ボソンの質量 2 乗項 $m_G^2(G^{\hat{a}})^2$ が存在したとすると，これはシフト対称性と矛盾するので，NG ボソンは質量を持てない．こうして，ゴールドストーンの定理が導かれたことになる． □

ところで，理論の持つゲージ対称性が大域的対称性から局所対称性に拡張される場合には,（破れた対称性に付随する）ゲージ場 $A_\mu^{\hat{a}}$ が導入され，これも共変微分を通じてネーター・カレントに $A_\mu^{\hat{a}} j^{\hat{a}\mu}$ のように結合するので，$\partial_\mu G^{\hat{a}}$ に比例した (5.57) の項をゲージ変換によって吸収することが可能なはずである．これは，正に次に議論するヒッグス機構の本質的な部分である．

5.6　ヒッグス機構

前節で大域的ゲージ対称性の破れによって質量ゼロの **NG ボソン**が必然的に出現することを見た．ゲージ対称性が大域的なものから局所的なものに拡張されると，状況は大きく変化する．結論から述べると，前節の最後の議論から示唆されるように NG ボソンはゲージボソンの**縦波成分**として吸収され，これによってゲージボソンが質量を獲得すると同時に NG ボソンは物理的自由度としては消滅すると見なすことができる．この機構が「**ヒッグス機構**」と呼ばれるものである．この節ではこの機構の本質的な部分を解説し，その標準模型における帰結を考える．

例えば電磁波の偏極は進行方向と垂直な 2 方向のみを向く．即ち電磁波は横波である．すると偏極ベクトルは進行方向を回転軸とする空間回転の下で明らかに回転するので，進行方向を z 軸とすると，光子のスピンの z 成分は $s_z = \pm 1$ である．しかし，本来スピンの大きさ $s = 1$ の場合の z 成分は $2S + 1 = 3$ 通りの値，即ち $s_z = \pm 1, 0$ をとり得るように思われる．光子が $s_z = \pm 1$ のみ持つのは，光子が質量ゼロのゲージボソンであるためにゲージ変換の自由度の分だけ電磁ポテンシャルの自由度が減るからであると考えられるが，逆に言えば，もしも質量ゼロのゲージボソンが $s_z = 0$，つまり進行方向に偏極していて z 軸の周りで回転しない自由度を獲得すれば，そのゲージボソンは質量を得ることを示唆している．この自由度を供給するのが NG ボソンなのである．NG ボソンはスカラー粒子なので，これからスピン 1 のゲージ場と同様に振る舞うものを作ろうとすると $\partial_\mu G^{\hat{a}}$ のようになり，∂_μ は 4 元運動量 p_μ に対応づけられるので自然に進行方向の偏極が得られるという訳である．物理的には，ゲージボソンの質量を禁止していたのはゲージ対称性であったので，その自発的破れによって，破れた対称性に付随するゲージボソンが質量を得るというのはごく自然なことであると言える．

5.6.1　$U(1)$ モデル

このヒッグス機構が具体的にどのように働くのかを，簡単な $U(1)$ ゲージ理論，即ち**スカラー QED** を用いて考えてみよう．5.4 節で議論したように電荷を持ったスカラー場を考えるが，今度は A_μ のゲージ場で表されるゲージボソンもきちんと導入し $U(1)$ 局所ゲージ対称性を持った理論を考える：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi),$$
$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \qquad V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2. \tag{5.58}$$

ポテンシャルは (5.43) と同じである．スカラー場の実部が真空期待値 $\frac{v}{\sqrt{2}}$ ($v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$) を持ったとし，線形実現によりヒッグス h，NG ボソン G（虚部）を用いて ϕ を表すと

$$\phi = \frac{v + h + iG}{\sqrt{2}} \tag{5.59}$$

となる．これを (5.58) に代入し計算すると，場の 3 次以上の項および定数項を無視して

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}(\partial_\mu G)(\partial^\mu G) - \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2 \\ &- evA_\mu(\partial^\mu G) + \frac{1}{2}(ev)^2A_\mu A^\mu\end{aligned} \tag{5.60}$$

が得られる．(5.60) の最後の項は，ゲージボソン A_μ が

$$m_A = ev \tag{5.61}$$

という真空期待値およびスカラー場の電荷（の絶対値）e に比例した質量を得ることを端的に言っていて，期待どおり自発的ゲージ対称性の破れによってゲージボソンが質量を得ることを示している．また，1 つ前の項 $-evA_\mu(\partial^\mu G)$ は期待したように，質量を持たない NG ボソン G が $\partial^\mu G$ の形で（NG ボソンは微分の形でのみ現れる）ゲージ場と結合し，縦波成分を供給していることを表している．また，これらの項が共存することによって $U(1)$ 対称性が自発的に破れるにも関わらず 4 元電磁カレントの保存則は成立するのである．これを見てみることにしよう．

(5.60) の最後の 2 項の寄与を用いて A_μ の 2 点関数，即ち自己エネルギーテンソル $\pi_{\mu\nu}$ を図 5.2 のファインマン図に従って計算してみると，ゲージボソンの運動量を k_μ とし，また (5.61) に注意すると

$$\pi_{\mu\nu}(k) = -i\left\{ig_{\mu\nu}m_A^2 + (-evk_\mu)\frac{i}{k^2}(evk_\nu)\right\} = m_A^2\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{5.62}$$

が得られる．

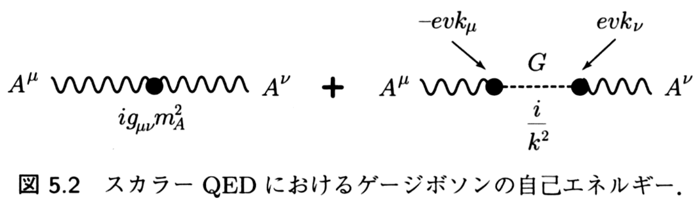


図 5.2 スカラー QED におけるゲージボソンの自己エネルギー．

(5.62) の自己エネルギーテンソル $\pi_{\mu\nu}(k)$ はゲージボソンに結合する電磁カレントの積の真空期待値 $\langle 0|j_\mu(x)j_\nu(0)|0\rangle$（の運動量空間へのフーリエ変換）と見なされるので，カレントの保存 $\partial^\mu j_\mu(x)=0$ は $k^\mu\pi_{\mu\nu}(k)=0$ と同等である．(5.62) より

$$k^\mu\pi_{\mu\nu}(k)=m_A^2k^\mu\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)=0 \tag{5.63}$$

が容易に分かり，自発的に対称性が破れているにも関わらずカレントの保存則は相変わらず成立していることになる．また，ゲージボソンの静止系に移ると $k_\mu=(m_A,0,0,0)$ なので，自己エネルギーテンソルにおいて $\pi_{00}(k)=m_A^2(g_{00}-\frac{k_0^2}{k^2})=0$ であり $\pi_{\mu\nu}(k)=m_A^2\mathrm{diag}(0,-1,-1,-1)$ となって，時間方向 (time-like) の偏極は消え 3 つの空間方向 (space-like) の偏極のみが残ることが分かる．これは質量のあるスピン 1 の粒子の持つべき 3 つの偏極の自由度に対応している．

この議論からの教訓としては，実は必ずしも自発的対称性の破れの場合に限らずとも，一般に局所ゲージ不変な理論があり，ゲージボソンが質量ゼロのスカラー粒子と微分を含む "微分結合" によって混合していさえすれば，この結合により自己エネルギーに $\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ の項が現れ，またゲージ不変性より $g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ という形にまとまらざるを得ないので，その前の係数によってゲージ場の質量の 2 乗が与えられることが分かる．少し変わった例かもしれないが以下の例題を参照して頂きたい．

例題 5.3　余剰次元を持った 4 次元空間，したがって 5 次元時空を考える．余剰次元は半径 R の小さな円に "**コンパクト化**" しているとする．この 5 次元時空上でゲージ場のみを持つ $U(1)$ ゲージ理論を考える．ゲージ場の 4 次元成分は $\frac{n}{R}$ $(n=0,1,\dots)$ の（4 次元時空から見た）質量を持つゲージボソンの集まりになる．$n\neq 0$ の場合にゲージ場が質量を得る機構は上述のヒッグス機構と同等であることを説明しなさい．

解　余剰次元の空間座標を y $(-\pi R\leq y\leq \pi R)$ とし，5 次元時空上のゲージ場を $A_M=(A_\mu,A_y)$ $(\mu=0,1,2,3)$ とする．4 次元時空の観点では A_μ はゲージ場，A_y は 4 次元的ローレンツ変換の下で不変なのでスカラー場と見なされる．ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}F_{\mu y}F^{\mu y},\\ F_{\mu\nu}&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,\qquad F_{\mu y}=\partial_\mu A_y-\partial_y A_\mu.\end{aligned} \tag{5.64}$$

ラグランジアンの 2 項目が，4 次元理論におけるゲージ場と NG ボソンの混合に対応する．実際，場に周期境界条件 $A_M(x^\mu,y+2\pi R)=A_M(x^\mu,y)$ を課して y に関してフーリエ展開し，例えば A_y に関して

$$A_y(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{n}{R}y}}{\sqrt{2\pi R}} A_y^{(n)}(x) \qquad \left(A_y^{(-n)}(x) = \{A_y^{(n)}(x)\}^*\right) \tag{5.65}$$

とすると（各 n のモードを“**カルツァ・クライン (Kaluza–Klein) モード**”と言う），ラグランジアンの 2 項目は y 座標に関する積分の後に

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi R}^{\pi R} dy \left\{-\frac{1}{2}F_{\mu y}F^{\mu y}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\partial_\mu A_y^{(n)} - i\left(\frac{n}{R}\right)A_\mu^{(n)}\right)\left(\partial^\mu A_y^{(n)} - i\left(\frac{n}{R}\right)A^{(n)\mu}\right)^*\end{aligned} \tag{5.66}$$

という 4 次元的ラグランジアンに帰着する．これは，それぞれのモードに関して，あたかも真空期待値を $v^{(n)} = \frac{n}{R}$ としたときのヒッグス機構と同じ機構が働いていることを意味する．実際 (5.66) の $(\frac{n}{R})^2 A_\mu^{(n)}(A^{(n)\mu})^*$ の項から $A_\mu^{(n)}$ が $|\frac{n}{R}|$ の質量を持つことが読み取れる．なお，これはこのモードの余剰次元方向の運動量 $\frac{n}{R}$ が 4 次元的質量を与えることから当然ではある．また $\mathrm{Im}(\frac{n}{R}A_\mu^{(n)}\partial^\mu A_y^{(n)})$ の項は $A_\mu^{(n)}$ と $A_y^{(n)}$，正確にはぞれぞれの実部と虚部の間の混合を表す項であり，したがって $A_y^{(n)}$ が正に NG ボソンのように振る舞うことが分かる．実際 (5.64) には $\partial_y A_y^{(n)}$ の項は無く $A_y^{(n)}$ の質量項は現れない．この例では特に何か対称性の自発的破れが起きているという訳ではないことに注意しよう． □

これまでの議論から示唆されるように，局所ゲージ対称性を持つ理論では NG ボソンを適当な局所ゲージ変換で消去することも可能である．NG ボソンが消去されるようなゲージを**ユニタリー・ゲージ**と言う．まず (5.59) のスカラー場を非線形実現の形で $\phi = e^{i\frac{G}{v}}\frac{v+h}{\sqrt{2}}$ と書き，G を変換のパラメターとする局所ゲージ変換 $\phi \to \phi' = e^{-i\frac{G}{v}}\phi = \frac{v+h}{\sqrt{2}}$ を行って G を消去する．しかし，この変換は局所ゲージ変換なので $\partial_\mu G$ に比例した“お釣り”が出るが，それはゲージ場の変換

$$A_\mu \quad \to \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu G \tag{5.67}$$

によって吸収され，G は完全に表舞台から姿を消す．実際，こうした変換後 (5.58) のラグランジアンは，場の 3 次以上の項と定数項を無視すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2\\ &+ \frac{1}{2}(ev)^2 A'_\mu A'^\mu \qquad (F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu),\end{aligned} \tag{5.68}$$

と書かれ G は完全に消去される．

5.6.2 標準模型におけるヒッグス機構

以上の議論を標準模型に適用してみよう．ゲージ対称性の自発的破れ $SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$ において，残る対称性は電磁気の対称性 $U(1)_{em}$ のみであるので，光子を除き，$W^\pm$, Z の 3 つのゲージボソンが質量を得るはずである．ただし $W^\pm$ は互いに粒子・反粒子の関係にあるので同一の質量 M_W を持つ．Z の質量を M_Z とし，M_W, M_Z を求めてみよう．

そのためにはヒッグス 2 重項 H の共変微分による運動項が必要であるが，それは次のように与えられる（H の弱ハイパーチャージ $Y = 1$）：

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H), \qquad D_\mu H = \left[\partial_\mu - i\left(gA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g' B_\mu \frac{1}{2}\right)\right] H. \tag{5.69}$$

ゲージ場の質量 2 乗項は $\mathcal{L}_H$ におけるゲージ場の 2 次の項において，H をその真空期待値 (5.38) に置き換えれば得られる：

$$\begin{aligned}
&\left|\left(gA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + g' B_\mu \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{g}{2}(A_\mu^1 - iA_\mu^2)\frac{v}{\sqrt{2}} \\ (-\frac{g}{2}A_\mu^3 + \frac{g'}{2}B_\mu)\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right|^2 \\
&= \left(\frac{gv}{2\sqrt{2}}\right)^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu}) \\
&\quad + \left(\frac{v}{2\sqrt{2}}\right)^2 (-gA_\mu^3 + g' B_\mu)(-gA^{3\mu} + g' B^\mu) \\
&= \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}\,v}{2}\right)^2 Z_\mu Z^\mu.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

ただし，ここで (5.9), (5.23), (5.25) を用いた．また，正確には $|\ |^2$ をとる際にローレンツ不変性を保証するために添字 μ の上げ下げを行うものとする．よって，

$$M_W = \frac{gv}{2}, \qquad M_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}\,v}{2} \tag{5.71}$$

が得られる．よって (5.25) から，Z のほうが W より $\frac{1}{\cos\theta_W}$ だけ重いことになる：

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1. \tag{5.72}$$

ここで定義した **$\boldsymbol{\rho}$ パラメターは電弱相互作用の精密検証 (precision test)** で重要な役割を演じる．

では，すべての粒子の質量の起源であるヒッグスの真空期待値 v はどのように決まるであろうか．それはベータ崩壊を当初考えられていた時空の一点で働く「**接触相互作用**」（図 3.2）ではなく，図 5.3 に見られる弱ゲージボソン $W^\pm$ の交換によって生じると考え直すことで可能になる．

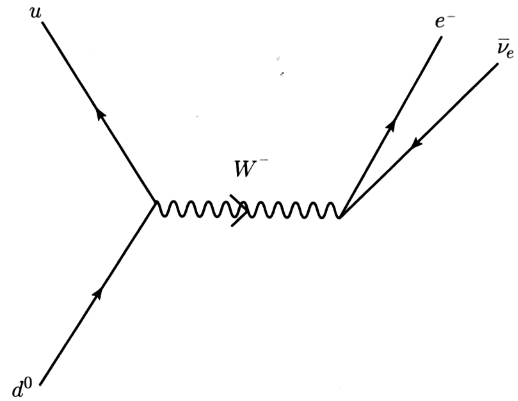


図 5.3 標準模型におけるベータ崩壊のファインマン図.

図 5.3 のファインマン図から (5.31), (5.33) より導かれるファインマン則にしたがって 4 つのフェルミオンに関する“**実効ラグランジアン (effective lagrangian)**” $\mathcal{L}_{eff}$ を求めると

$$\mathcal{L}_{eff} = c\left(\bar{u}\,\gamma_\mu(1-\gamma^5)\,d\right)\left(\bar{e}\,\gamma_\mu(1-\gamma^5)\,\nu_e\right) \tag{5.73}$$

となる．ここで c は定数であり，射影演算子 L の代わりに，歴史的な事情で $2L = 1-\gamma^5$ を用いて表している．実効ラグランジアンの係数 c は，図 5.3 の外線の 4 つのフェルミオンはそのままにして，残りの内線の**伝播子 (propagator)**，**相互作用頂点 (interaction vertex)** の部分をファインマン則にしたがって計算し，最後に $-i$ を掛ければ良い．具体的に c を計算すると，W^- の持つ 4 元運動量を k_μ として

$$c = (-i)\left(i\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-i}{k^2 - M_W^2} \simeq -\frac{g^2}{8M_W^2} \tag{5.74}$$

となる．ここで低エネルギーであることから $k^2 \ll M_W^2$ の近似を用いた．c はフェルミ定数 G_F (3.25) を用いて $-G_F/\sqrt{2}$ と表されるので（(3.25) では次章で述べるフレーバー混合のために d クォークは d^0 という d クォークと s, b クォークの混ざった状態で書かれているが，ここでは 1 世代のみ考えているので，こうした違いは無視する），次の関係が得られる：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad \rightarrow \quad G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2}. \tag{5.75}$$

さらに (5.71) および (3.26) を用いると

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} \quad \rightarrow \quad v = 2^{-\frac{1}{4}} G_F^{-\frac{1}{2}} \simeq 250 \text{ (GeV)} \tag{5.76}$$

と真空期待値が決まる．また (5.24) の $g^2 = 4\pi\alpha/\sin^2\theta_W$ の関係および (5.75) より，$\alpha = \frac{1}{137}$，$\sin^2\theta_W = 0.23$ を用いると，M_W，M_Z も

$$M_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2\theta_W} \quad \rightarrow \quad M_W \simeq 80\ (\text{GeV}),$$
$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \quad \rightarrow \quad M_Z \simeq 90\ (\text{GeV}) \tag{5.77}$$

のように決まる．ただし，ここで用いたパラメターの値は低エネルギーでのものを用い量子補正の効果を無視したものである．この $\boldsymbol{M_W}$ は弱い相互作用を特徴づけるエネルギー（質量）スケールと言えるので「**弱スケール (weak scale)**」とも呼ばれる．

標準模型においては，電磁相互作用と弱い相互作用は，ワインバーグ角による混合に見られるように独立ではなく，統一的に記述されている．ただし，正確には g, g' が独立であることもあり完全な統一ではなく，真の統一のためには大統一理論 (GUT) のような理論を待たなければならない．電磁相互作用と弱い相互作用の低エネルギーでの相互作用の強さに関する大きな差異は，ゲージ対称性の自発的破れの帰結として，弱い相互作用を司る $W^{\pm}$, Z が大きな質量を持つ一方で光子は質量を持たないことに起因するのである．これは，見方を変えれば，弱スケール $M_W \sim 10^2$ (GeV) が無視できるくらいに十分に高いエネルギー領域では両者に大きな差異は見られなくなるということを意味している．これが**電弱統一理論**が可能になる物理的理由である．

ヒッグス機構によりゲージ場が質量を得ることを見たが，ヒッグスそのものも 4 点の**自己相互作用項** $\lambda(H^\dagger H)^2$ を通じて真空期待値に比例する質量を自分自身から得ることが分かる．(5.60) における計算と同様に計算すると，ヒッグス質量 m_h が

$$m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2\mu^2} \tag{5.78}$$

と与えられる．

先に少し述べたようにフェルミオンも (5.37) のようなヒッグスとの湯川相互作用によって，真空期待値に比例した質量を持つことが分かる．しかし，(5.37) は d クォークに質量を与えるが u クォークに質量を与えることができない．これは真空期待値が (5.38) に見るように 2 重項の下側になるからであるので，真空期待値の位置を上にあげることを考えよう．このために $\tilde{H}$ を以下のように定義する：

$$\tilde{H} = i\sigma^2 H^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \tag{5.79}$$

ここで $\phi^- = (\phi^+)^*$ は ϕ^+ の反粒子である．一般の $SU(n)$ 群の場合には n 成分のベクトルで表される群の "基本表現" と，その複素共役である "反・基本表現" は異なる表現であるので，(5.79) で定義される $\tilde{H}$ は元の表現とは違うように思える．しかし，実は $SU(2)$ の場合のみは例外であり，これらの表現は同等であることが分かる．実際，H の $SU(2)_L$ 変換を $H \rightarrow H' = e^{i\lambda^a \frac{\sigma^a}{2}} H$ で与えるとき，$\tilde{H}$ の変換は

$$\begin{aligned}\tilde{H} \quad \rightarrow \quad \tilde{H}' &= i\sigma^2 H'^* \\ &= i\sigma^2 (e^{i\lambda^a \frac{\sigma^a}{2}} H)^* \\ &= \sigma^2 e^{-i\lambda^a \frac{(\sigma^a)^*}{2}} \sigma^2 \tilde{H} \\ &= e^{i\lambda^a \frac{\sigma^a}{2}} \tilde{H} \end{aligned} \tag{5.80}$$

となり，元の H の変換と全く同じになる．ただし，ここで $\sigma^2(\sigma^a)^*\sigma^2 = -\sigma^a$ というパウリ行列の性質を用いた．$\tilde{H}$ では電気的に中性の ϕ^{0*} は 2 重項の上側なので，これを用いた湯川相互作用から u クォークも質量を得ることができる．こうして，u, d クォークの**湯川相互作用**は次のように与えられる：

$$\mathcal{L}_Y = -f_d \bar{Q} H d_R - f_u \bar{Q} \tilde{H} u_R + h.c. \tag{5.81}$$

ここで $h.c.$ (hermitian conjugate) はエルミート共役をとって加えるという意味である（そうでないとラグランジアンがエルミートにならない）．湯川相互作用の強さを表す定数 $f_{u,d}$ は湯川結合定数と呼ばれる．なお $\tilde{H}$ は H の複素共役から得られるため H とは逆符号の弱ハイパーチャージ $Y = -1$ を持ち，したがって上記の湯川相互作用は $U(1)_Y$ に関しても不変になっていることが分かる．

こうして，元々質量を持っていなかった u, d クォークはゲージボソン等と同様に自発的対称性の破れの後に質量を持つことが分かる．即ち，中性のスカラー場を，その真空期待値 $\langle \phi^0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$ で置き換えて (5.81) に代入すると，v は場ではなく単なる定数なので，v に比例した項からクォークの質量項が現れる：

$$-\frac{f_d v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L d_R - \frac{f_u v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L u_R + h.c. \tag{5.82}$$

ここで右巻き，左巻きのワイル・スピノールを足してディラック・スピノール $d = d_L + d_R$, $u = u_L + u_R$ を構成し，またクォーク質量を

$$m_d = \frac{f_d v}{\sqrt{2}}, \qquad m_u = \frac{f_u v}{\sqrt{2}} \tag{5.83}$$

として (5.82) を書き直すと

$$\mathcal{L}_{qm} = -(m_d \bar{d} d + m_u \bar{u} u) \tag{5.84}$$

のように確かにクォークの質量項が得られることになる．こうして，ワイル・フェルミオンを用いて記述される標準模型は最終的にディラック・フェルミオンで書くことができる．レプトンに関しても同様であるが，標準模型ではニュートリノの質量はゼロとするので，湯川結合は電子のみが持ち，電子の質量は $m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}}$（$f_e$：電子の湯川結合定数）で与えられる．なお，実際にはフェルミオンは小林・益川理論が予言したとおり 3 世代分存在するのであるが，これについては次章で議論する．なお，一般にフェルミオン f の**湯川結合定数** f_f は，

ゲージ結合定数 g との比で書くと，(5.71) および (5.83) より

$$f_f = \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{m_f}{M_W} \qquad (m_f：フェルミオン\ f\ の質量) \tag{5.85}$$

のように書かれる．よって第 1 世代のような軽いクォーク，レプトンの湯川結合は非常に小さいが，逆に次章以降で議論される第 3 世代の $\boldsymbol{t}$ **クォーク**（質量は 174.3 (GeV)）に関しては湯川結合はゲージ結合と同じオーダーになる．

本章の最後に一つ言及しておこう．標準模型では，クォークとレプトンは別々のゲージ群の表現（2 重項，等）に属し，それぞれのセクターでゲージ不変性が保たれている．よって仮にクォークやレプトンのいずれかを導入しなくても理論が破たんする訳ではないように思える．しかし実際にはクォークとレプトンが共存して初めて意味のあるゲージ理論になることが知られている．それは，出発点となるラグランジアン（作用），即ち古典論のレベルではゲージ対称性を持っていたとしても，量子論的効果（量子補正）によってゲージ対称性が破れてしまう，という「**量子異常 (anomaly)**」が出現する可能性があるからである．具体的には 4 次元時空の場合にはゲージボソン 3 個が外線にあるような "**三角ダイアグラム**" が関与し，更に標準模型のようなパリティー対称性が破れていて左右のカイラリティーが非対称的になっている "**カイラルな理論**" の場合にのみ量子異常が現れ得ることが知られている．量子異常でゲージ対称性が壊れてしまうと，この対称性に強く依拠した理論の美点である**繰り込み可能性**も壊れてしまうことが知られており重大な問題である．

標準模型では，幸いなことに，量子異常への寄与は，クォークとレプトンの間で見事に相殺することが分かる．例えば $U(1)_Y$ のゲージボソン B_μ が 3 個外線にあるような三角ダイアグラムの量子異常への寄与は，クォークのみの場合には弱ハイパーチャージの 3 乗の和を，右巻きと左巻きで符号を変えてとった $3\{-(\frac{1}{3})^3 \times 2 + (\frac{4}{3})^3 + (-\frac{2}{3})^3\} = 6$ となる．ここで全体にかかっている 3 の因子はクォークの 3 つのカラーの自由度を表している．一方レプトンからの寄与は $-(-1)^3 \times 2 + (-2)^3 = -6$ であり，確かにクォークとレプトンの寄与を足すと量子異常が消えることが分かる．本来はすべてのゲージボソンの組合せに対して同様の議論をすべきであるが，ここでは割愛する．

こうして，(5.31), (5.32), (5.50), (5.69), (5.81) を用いて**標準模型のラグランジアン**（フェルミオンに関しては 1 世代分のみ）は全体として以下のように与えられる．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y - V. \tag{5.86}$$

正確には，これに加えてゲージ場の量子化のために必要な**ゲージ固定項**，およびそれに伴う**ファデエフ・ポポフ (Fadeev–Popov) ゴースト**に関する項が必要であるが，ここでは省略する．

標準模型におけるファインマン則を，ラグランジアン (5.86) から導出する

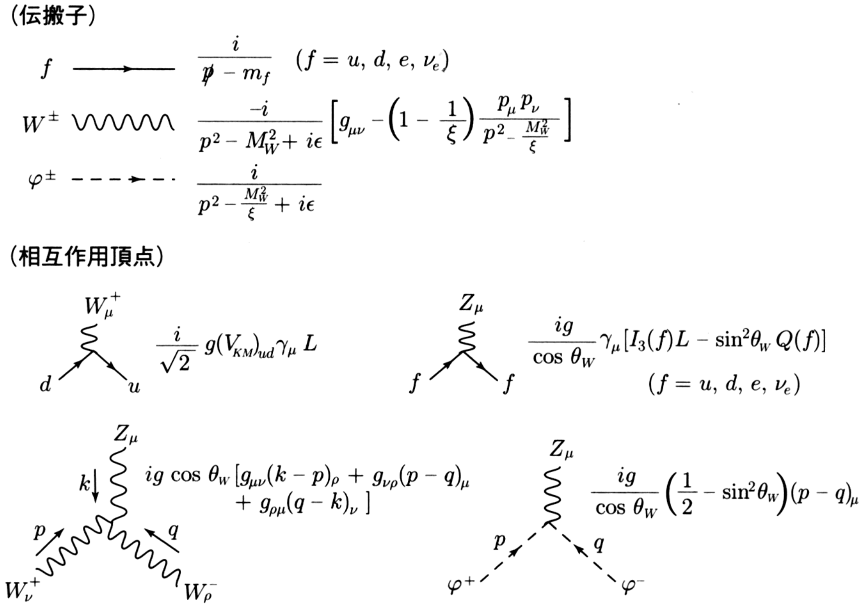


図 5.4　標準模型におけるファインマン則のいくつかの例.

ことができる．ここでは，そのうちのいくつかだけを例として図 5.4 に挙げることにする．ただし，この章ではクォーク，レプトンについては 1 世代のみ考慮したので，ファインマン則も 1 世代目に関してのみ与えられているが，7 章以下で 3 世代を持つ小林・益川模型に拡張されることを見越して，図 5.4 におけるフェルミオンの荷電カレント相互作用については，小林・益川行列 V_{KM} の要素も加えてある．例えば b クォークから t クォークへの遷移の場合には $(V_{KM})_{ud} \to (V_{KM})_{tb}$ のように置き換えればよい．また，(5.86) ではゲージ固定項は省略されているが，$W^\pm, \varphi^\pm$ に関する伝播子は，8 章にて言及する R_ξ ゲージにおけるもので，パラメター ξ を含んでいる．また 8 章で用いる記法に揃えて，ここでは (5.49) の電荷を持った NG ボソン G^+ を φ^+ と書いていることに注意しよう．

第 6 章
フレーバー混合とFCNC過程

6.1 ワインバーグ・サラム模型と大きすぎるFCNC

前章の標準模型に関する議論ではクォーク，レプトンに関しては 1 世代分のみ導入した．グラショウのゲージ群に関するアイデアを受けてワインバーグとサラムが標準模型を提唱した際には，クォークとしては u, d, s の 3 つのみが導入された．当時知られていたクォークは原子核の構成要素の u, d と K 中間子のようなストレンジネスを持ったハドロンに含まれるストレンジクォーク s であったからである．実際，ゲルマン・ツバイクの**クォーク模型**はこれら 3 個が $SU(3)$ の基本表現となって様々なハドロンを構成するという理論であった．u, d が第 1 世代のクォーク，s が第 2 世代のクォークということになる．

すると，s クォークには $SU(2)_L$ 2 重項を組むべきパートナーがいないことになり，s_L は s_R 同様に 1 重項として導入された：

$$\begin{aligned} Q = \begin{pmatrix} u \\ d^0 \end{pmatrix}_L, \quad s_L^0 \quad ; \\ u_R, \quad d_R, \quad s_R. \end{aligned} \tag{6.1}$$

なおレプトンに関しては省略している．ここで d_L^0 はベータ崩壊のような荷電カレントによる弱い相互作用において u クォークのパートナーとなるクォークであり，s_L^0 はこれと独立な（量子力学的には“直交した”）クォークの状態を表す．もしも，これらがそれぞれフレーバーと質量の確定した d, s クォークとそれぞれぴったり一致して $d_L^0 = d_L$, $s_L^0 = s_L$ だとすると，d, s クォークは世代の確定した状態になるので，素粒子の反応で世代が変わる（世代間の混合が起きる）ことはない．少し見方を変えると，s クォークの導入により，ラグランジアンには s クォークの共変微分の項，および質量項 $m_s \bar{s} s$ が加わるが（s_L が 1 重項なのでゲージ不変な質量項が可能である），この場合ラグランジアンは明らかに次のような 2 つの独立な $U(1)$ 位相変換 $(U(1) \times U(1))$ の下で不変

である：

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{i\lambda_1} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

$$s \quad \to \quad s' = e^{i\lambda_2} s. \tag{6.3}$$

ここで $\lambda_{1,2}$ は 2 つの独立な定数位相で，2 つの独立な $U(1)$ 変換を表す．ちょうど $U(1)$ ゲージ変換の下で不変な QED において電荷が保存するように，**ネーターの定理**により，$\lambda_{1,2}$ の $U(1)$ 変換の下での不変性から 2 つの独立な保存量が生じる．電荷に対応するそれぞれの保存量を G_1，G_2 と書くと，例えば λ_1 による変換は第 1 世代のクォークのみの変換なので，G_1 は第 1 世代のみが持つ加算的量子数であり "第 1 世代数" と言うことができ，同様に G_2 は "第 2 世代数" であると言える．これらが独立に保存するということは，世代は決して混合せず，したがって $d \leftrightarrow s$ といった同じ電荷でも世代，フレーバーの違うクォーク間の遷移，いわゆる **"Flavor Changing Neutral Current (FCNC)" 過程**は生じ得ないということを意味する．FCNC は「フレーバーの変わる中性カレント」という意味であるが，中性カレント過程というのは中性のゲージボソン Z に結合するカレント同様にクォークの電荷が変化しない過程であるからである．

しかしながら，現実には世代間の遷移，混合は起きている．それは例えば $K^- \to \pi^-\pi^0$ といった崩壊に見られるように，(ベータ崩壊での $d \to u$ といった遷移の他に) $s \to u$ といった遷移が実際に起きているからである．カビボ (Cabbibo) はこうした事実を，荷電カレントにおける u クォークのパートナーである d^0 が実際には d と s の混ざった状態であるとして説明した：

$$d_L^0 = d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c. \tag{6.4}$$

ここで角度 θ_c は "**カビボ角 (Cabbibo angle)**" と呼ばれる．この角は実験データを用いて決定されていて

$$\sin\theta_c \simeq 0.23 \tag{6.5}$$

である．これに従って d^0 と直交する s^0 もやはり d, s の混じった状態になり，(6.4) と合わせると，ちょうど 2 次元空間の座標軸（基底）の変換によるベクトルの回転のような関係で表される：

$$\begin{pmatrix} d^0 \\ s^0 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L. \tag{6.6}$$

よって，(6.1) は

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{pmatrix}_L, \quad -d_L \sin\theta_c + s_L \cos\theta_c \quad ; \tag{6.7}$$

$$u_R, \quad d_R, \quad s_R,$$

と具体的に書ける．すると，明らかに荷電カレントにおいて u は d だけでなく s にも遷移することができるので，もはや世代数 $G_{1,2}$ は保存しなくなる．実際 (5.33) の荷電カレント J^{μ}_{+} は 1 世代のみの場合の d を d^0 に置き換えて

$$J^{\mu}_{+} = \frac{g}{\sqrt{2}}\,\bar{u}\gamma^{\mu}Ld^0 = \frac{g}{\sqrt{2}}\left\{\cos\theta_c(\bar{u}\gamma^{\mu}Ld) + \sin\theta_c(\bar{u}\gamma^{\mu}Ls)\right\} \tag{6.8}$$

となるので，2 項目はもはや (6.2), (6.3) の変換の下で不変ではなくなる．

また，$W^{\pm}$ に結合する荷電カレント J^{μ}_{+}, J^{μ}_{-} による相互作用を組み合わせると $d \to u \to s$, 即ち $d \to s$ という FCNC も可能となる．このように世代数が保存せず $d \leftrightarrow s$ といったフレーバーの違うクォークの間に遷移が起きる現象を「**フレーバー混合**」と言う．

しかし，問題なのは荷電カレントの組合せだけでなく，Z に結合する中性カレントそのものにも FCNC が現れてしまうことである．実際，電荷が $-\frac{1}{3}$ の "down-type" クォークに関する中性カレントは (5.34) に s クォークに関する部分も加えて

$$\begin{aligned}
J^{\mu}_{Z} &= \frac{g}{\cos\theta_W}\begin{pmatrix}\bar{d}^0 & \bar{s}^0\end{pmatrix}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d^0 \\ s^0\end{pmatrix} \\
&= \frac{g}{\cos\theta_W}\begin{pmatrix}\bar{d} & \bar{s}\end{pmatrix}\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}\cos\theta_c & -\sin\theta_c \\ \sin\theta_c & \cos\theta_c\end{pmatrix}\times \\
&\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d \\ s\end{pmatrix} \\
&= \frac{g}{3}\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}(\bar{d}\gamma^{\mu}d + \bar{s}\gamma^{\mu}s) - \frac{g}{2\cos\theta_W}(\cos^2\theta_c\bar{d}\gamma^{\mu}Ld + \sin^2\theta_c\bar{s}\gamma^{\mu}Ls) \\
&\quad - \frac{g\cos\theta_c\sin\theta_c}{2\cos\theta_W}(\bar{s}\gamma^{\mu}Ld + \bar{d}\gamma^{\mu}Ls)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

となり，最後の $\sin\theta_c\cos\theta_c = \frac{\sin 2\theta_c}{2}$ に比例する項は **FCNC** の存在を示している．なお，$\sin 2\theta_c$ に比例している物理的理由は，$\theta = \frac{\pi}{2}$ だと単に d, s の名前の入れ替えに対応し物理的にはフレーバー混合が無いのと同じであるからである．このようにラグランジアン自体に FCNC が存在するということは，古典レベル，即ちファインマン図の **tree** レベルで **FCNC 過程が生じる**ことを意味する．

FCNC 過程の代表例としては 2.4 節で議論した，2 つの中性 K 中間子の質量差 Δm_K の原因となる $\boldsymbol{K^0} \leftrightarrow \boldsymbol{\bar{K}^0}$ **混合**がある．K^0 とその反粒子 $\bar{K}^0$ は "奇妙なクォーク" と呼ばれる s クォークとその反粒子を含んでいてストレンジネス

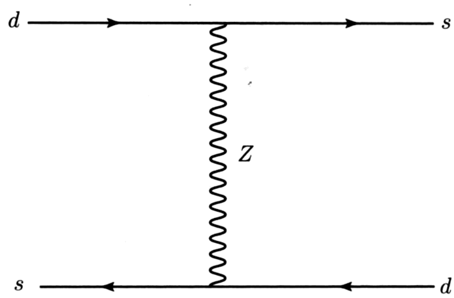


図 6.1　tree レベルでの FCNC 過程.

がそれぞれ $S=1$, -1 のハドロンなので，これらの混合ではストレンジネス S が 2 変化しており（$|\Delta S|=2$），したがってフレーバーが保存していない．2.4 節で見たように，この $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合によって生じる中性 K 中間子の質量差 Δm_K は

$$\Delta m_K = 3.48\times 10^{-12} \quad (\mathrm{MeV}) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta m_K}{m_K} \simeq 7\times 10^{-15} \tag{6.10}$$

であって極めて小さい．このように，FCNC 過程の起きる確率は一般に小さく，したがってこれらの過程は "**稀少過程 (rare process)**" とも呼ばれる．

上述のようにワインバーグとサラムが提唱した当初の標準模型ではラグランジアン自体に FCNC が存在するために，この $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合が図 6.1 のような Z ゲージボソンの交換で tree レベルで生じてしまう（実際には，例えば $\bar{s}$ クォークと d クォークはそれらの間でグルーオンが交換されて生じる強い相互作用によって束縛されて $K^0, \bar{K}^0$ 中間子を形成する）．このファインマン図は図 5.3 のベータ崩壊のファインマン図と同様で交換されるゲージボソンの質量もほとんど同じなので，粗く言うと通常の弱い相互作用と同程度の確率振幅を与えるが，すると稀少過程である FCNC 過程の実験データ (6.10) と矛盾をきたすことになる．つまり理論の予言値が大きくなり過ぎるのである．

6.2　チャームクォークの導入（GIM 機構）

この FCNC をいかにして小さく抑えるかという難問を非常に自然な形で見事に解決したのがグラショウ (S.L.Glashow)・イリオポウロス (J.Iliopoulos)・マイアニ (L.Maiani) による**チャームクォークの導入**である．これにより FCNC は tree レベルでは禁止され自然に抑制されるのだが，その機構は **GIM 機構**と呼ばれる．

そのアイデアは実は簡単なものである．(6.9) を見ると中性カレントのうちで d クォークの電荷に比例する，$\frac{g}{3}\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}$ に伴われた項はフレーバーを変えず FCNC は現れないことが分かる．それは，電荷に比例した部分は d^0, s^0 に共通であるため，中性カレントを表す行列が単位行列に比例し，直交変換の下で

不変であるからである．より物理的には，この相互作用が d^0, s^0 に対し同等であるためにこれらの間に“**フレーバー対称性**”が存在するからである．具体的には，d^0, s^0 の相互作用が全く同じなので，これらの間の直交変換，より一般的にはユニタリー変換 $U(2)$ の下で，この部分の相互作用が不変になるのである．別の言い方をすると，そうした大域的 $U(2)$ 対称性の帰結としてフレーバー，あるいは世代数が保存するので FCNC が生じないとも言える．

中性カレント (6.9) が FCNC を持つのは，L に比例する部分が d^0, s^0 に対して非対称的である（d_L^0 のみが 2 重項のメンバーなので）ために $U(2)$ フレーバー対称性が破れてしまうからである．グラショウらのアイデアは s_L^0 にも左巻のパートナーを導入して 2 重項を形成し，この対称性を実現すれば良い，というものであった．こうして導入されたパートナーがチャームクォーク c に他ならない．このようにして 2 世代までが完成したことになる：

$$\begin{pmatrix} u \\ d^0 \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s^0 \end{pmatrix}_L \quad ; \tag{6.11}$$
$$u_R, \quad c_R, \quad d_R, \quad s_R.$$

こうして中性カレントにおいて d_L^0, s_L^0 は完全に同等になるので，tree レベルで FCNC が現れないことはすぐに理解できる．実際，(6.9) において，1 行目の d^0, s^0 の中性カレントを表す行列が今度は単位行列に比例するので，カビボ角による直交変換の後も FCNC は現れない．即ち，クォークに関する中性カレントは

$$J_Z^\mu = \frac{g}{\cos\theta_W}\left\{\bar{d}\gamma^\mu\left(-\frac{1}{2}L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)d \right.$$
$$\left. +\bar{s}\gamma^\mu\left(-\frac{1}{2}L + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)s\right\}. \tag{6.12}$$

こうして，標準模型では tree レベルでは FCNC は現れないが，loop レベル，即ち量子レベルでは FCNC は荷電カレントを通して生じる．先に議論したようにカビボ角でフレーバー間の混合が起きる以上，世代数は保存されないので当然ではある．実際，荷電カレント相互作用を繰り返して得られる $d \to u \to s$ や $d \to c \to s$ のように $d \to s$ という **FCNC が量子レベルで現れる**．すると，一見また問題が再燃するように思えるが，幸いそうはならない．それは FCNC はフレーバー対称性でコントロールされ，Z に結合する中性カレントが c クォークの導入によってフレーバー対称性を持つようになったので，**フレーバーの破れの唯一の原因はクォーク間の質量の差**ということになる．よって，FCNC の確率振幅はクォーク質量の差（実際には質量 2 乗の差が効く），即ち質量の“縮退が解ける”度合いによってコントロールされることになる．例えば $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合の場合には，tree レベルの場合に比べ，1-loop レベルで現れる摂動展開の因子 $\frac{g^2}{4\pi}$ の他に

$$(\sin\theta_c\cos\theta_c)^2\frac{(m_c^2-m_u^2)^2}{M_W^2 m_c^2}\sim(\sin\theta_c\cos\theta_c)^2\frac{m_c^2-m_u^2}{M_W^2}\sim 10^{-5} \quad (6.13)$$

という因子によってもその確率振幅が抑制される．よって FCNC の確率は通常の弱い相互作用による場合よりずっと小さく“自然に”抑えられるのである．こうした FCNC を自然に抑制する機構が「**GIM 機構**」と呼ばれるものである．

こうした議論から分かるように，FCNC が抑制される本質的理由はフレーバー対称性が存在すること，即ちクォークのゲージ結合がフレーバーに依らず普遍的であるということである．これは，別に標準模型に限らずともゲージ理論一般に当てはまることのように思える．実際，グラショウとワインバーグは“**自然なフレーバー保存 (natural flavor conservation)**”の条件として以下のような条件を提唱した：

グラショウ・ワインバーグの条件

同じ電荷，同じカイラリティーを持つワイル・フェルミオンはすべてゲージ群の同じ表現に属すべし．

ここで，同じ電荷とカイラリティーのワイル・フェルミオンに注目している理由は，d_L, s_L がカビボ角で混合したようにフェルミオンの質量項においてこれらのワイル・フェルミオンは一般に混合するからである．なお“自然な”というのは，理論のパラメターの微調整をしなくても理論そのものの構造的性質として正に“自然に”成り立つという意味合いを表している．チャームクォークの入った標準模型では左巻きのフェルミオンはすべて $SU(2)$ の 2 重項，右巻きはすべて 1 重項に属しているので，このグラショウ・ワインバーグの条件を満たしているが，最初のワインバーグ・サラム模型では d_L^0 は 2 重項なのに対して s_L^0 は 1 重項であり，この条件を満たしていなかったことになる．

第 7 章
小林・益川の3世代模型とCP対称性の破れ

チャームクォークの導入で2世代模型が完成しFCNCの問題は解決したが，クォーク，レプトンの世代は更に拡張されることになった．それは正に，この本のテーマである**CP対称性の破れ**に起因することである．即ち，3章で少し述べたように，観測された**中性 $\boldsymbol{K}$ 中間子系でのCP対称性のわずかな破れ**を説明するために3世代のクォークの導入が必要であることが小林・益川により指摘されたのである．この3世代を持った**小林・益川模型**の出現によって標準模型の最終的な確立に至った．なお，小林・益川模型が提唱されたのはチャームクォークの存在が確認される以前の，いわば "1.5" 世代しか存在が知られていないときであり，その先見性が分かる．

そこで，いよいよ標準模型の枠内で，いかにしてCP対称性の破れから3世代の必要性が導かれるかについて以下に説明することにする．

7.1 n 世代の場合の湯川結合と荷電カレントにおけるフレーバー混合

まず，世代の数に関係なく議論できるように，一般に n (n：自然数) 世代のクォーク，レプトンを持つ $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論の場合を考えよう．ここではクォークのセクターに着目し，$SU(2)_L$ の2重項および1重項を

$$\begin{gathered} Q_i^0 = \begin{pmatrix} u_i^0 \\ d_i^0 \end{pmatrix}_L \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u_{iR}^0, \quad d_{iR}^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{7.1}$$

と書く．例えば，u_{iL}^0, d_{iL}^0 は $W^\pm$ による弱い相互作用である荷電相互作用に参加するメンバーである．こうした理由で，u_i^0, d_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を「**弱固有状態 (weak eigenstate)**」と呼ぶ．弱固有状態は質量，したがってフレーバーの確定した状態である u, c, d, s 等の「**質量固有状態**」とは区別される．2

世代の場合のカビボ角の所の議論で見たように，正に弱固有状態と質量固有状態とのずれによって**フレーバー（世代間）混合**が生じるのである．

ゲージ相互作用だけでは世代が変化しない ($d_i^0 \to u_i^0$ のように i は変化しない) が，湯川相互作用においては世代を混ぜるような相互作用も，ゲージ不変性と矛盾することなく可能である．実際，1 世代の場合の湯川相互作用項 (5.81) を一般化した次のような湯川相互作用項を書くことができる：

$$\mathcal{L}_Y = -(f_d)_{ij}\,\overline{Q_i^0}\,H d_{jR}^0 - (f_u)_{ij}\,\overline{Q_i^0}\,\tilde{H} u_{jR}^0 + h.c. \tag{7.2}$$

湯川結合定数 $(f_{u,d})_{ij}$ を要素とする行列を $f_{u,d}$ と書くことにする．なお，(7.2) において i, j のような重複して現れる添字については和をとる（1 から n まで）ものとする．

この章の議論では世代構造が重要なので，(7.1) の代わりに，同じ電荷のクォークを縦ベクトルとしてまとめた次のような記法が便利である：

$$\begin{aligned} U_L^0 &= \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{pmatrix}_L, \qquad D_L^0 = \begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \\ \vdots \\ d_n^0 \end{pmatrix}_L, \\ U_R^0 &= \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{pmatrix}_R, \qquad D_R^0 = \begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \\ \vdots \\ d_n^0 \end{pmatrix}_R. \end{aligned} \tag{7.3}$$

この記法では，例えばクォークの運動項は世代を変えないので，ベクトルの内積の形で

$$\overline{U_L^0}\,i\partial\!\!\!/\,U_L^0 + \overline{U_R^0}\,i\partial\!\!\!/\,U_R^0 + \overline{D_L^0}\,i\partial\!\!\!/\,D_L^0 + \overline{D_R^0}\,i\partial\!\!\!/\,D_R^0 \tag{7.4}$$

のように書ける．ここで $\overline{U_L^0}$ 等にはディラック・スピノールに対する $\overline{u_{iL}^0}$ という演算と同時に n 成分の縦ベクトルのエルミート共役をとるという意味も含まれるものとする．同様に，共変微分で運動項と共に現れるゲージ相互作用に関しても，(5.33)～(5.35) に与えられるカレントのうちでクォークに関する部分を以下のように表すことができる：

$$J_+^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}}\overline{U_L^0}\gamma^\mu D_L^0, \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} J_Z^\mu = {} & \frac{g}{\cos\theta_W}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)\overline{U_L^0}\gamma^\mu U_L^0 - \frac{2g\sin^2\theta_W}{3\cos\theta_W}\overline{U_R^0}\gamma^\mu U_R^0 \\ & + \frac{g}{\cos\theta_W}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)\overline{D_L^0}\gamma^\mu D_L^0 + \frac{g\sin^2\theta_W}{3\cos\theta_W}\overline{D_R^0}\gamma^\mu D_R^0, \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$J^{\mu}_{EM} = \left(\frac{2}{3}\right)\overline{U^0_L}\gamma^{\mu}U^0_L + \left(\frac{2}{3}\right)\overline{U^0_R}\gamma^{\mu}U^0_R$$
$$- \left(\frac{1}{3}\right)\overline{D^0_L}\gamma^{\mu}D^0_L - \left(\frac{1}{3}\right)\overline{D^0_R}\gamma^{\mu}D^0_R. \tag{7.7}$$

これに対して，湯川結合に関しては世代が混合するのでベクトルの内積の間に行列 $f_{u,d}$ が入る：

$$\mathcal{L}_Y = -\left(\overline{U^0_L} \quad \overline{D^0_L}\right) H f_d D^0_R - \left(\overline{U^0_L} \quad \overline{D^0_L}\right) \tilde{H} f_u U^0_R + h.c. \tag{7.8}$$

ここで，ヒッグス場 H, $\tilde{H}$ は世代の添字を持たず，単に $SU(2)_L$ の 2 重項として左巻クォークの 2 重項と内積をとるものとする．ヒッグスが真空期待値を持つとクォークに関する質量行列が現れる：

$$\mathcal{L}_{qm} = -\overline{D^0_L} M^0_d D^0_R - \overline{U^0_L} M^0_u U^0_R + h.c. \tag{7.9}$$

ここで $M^0_{u,d}$ は up-type, down-type それぞれの**クォークに関する質量行列**である：

$$M^0_u = \frac{v}{\sqrt{2}} f_u, \qquad M^0_d = \frac{v}{\sqrt{2}} f_d. \tag{7.10}$$

これらの質量行列は一般に対角行列ではなく，また複素行列であり，U^0_L 等の弱固有状態は質量固有状態にはなっていない．そこで (7.10) が対角化され，したがって確定した質量を持つ状態の基底，即ち質量固有状態の基底に移ることを考える．そうした変換は，運動項 (7.4) を不変に保つためにユニタリー変換である必要がある．実際

$$U^0_L = V_{uL} U_L, \qquad U^0_R = V_{uR} U_R, \tag{7.11}$$
$$D^0_L = V_{dL} D_L, \qquad D^0_R = V_{dR} D_R, \tag{7.12}$$

のようにユニタリー行列 V_{uL} 等を用いて，質量固有状態 U_L 等にユニタリー変換することを考えると，この変換の下で運動項は明らかに $V^{\dagger}_{uL} V_{uL} = I_n$ (I_n : $n \times n$ の単位行列) 等から不変である：$\overline{U^0_L}\, i\partial\!\!\!/ U^0_L = \overline{U_L}\, i\partial\!\!\!/ U_L$, 等．そこで，(7.11), (7.12) によりクォークの質量行列も対角化できれば，クォークの自由ラグランジアン（場の 2 次式の部分）は完全に対角化され，U, D 等のディラック・フェルミオンは質量，したがってフレーバーの確定した質量固有状態となる．

そこで，質量行列 (7.10) を対角化することを考えよう．この質量行列は一般的に $n \times n$ の複素行列である．任意の複素行列 M を考えると，$MM^{\dagger}$ はエルミート行列なので，1 つのユニタリー行列 V_1 を用いて $V^{\dagger}_1 (MM^{\dagger}) V_1$ が対角行列になるように対角化可能であり，同様に $M^{\dagger}M$ も別のユニタリー行列 V_2 を用いて $V^{\dagger}_2 (M^{\dagger}M) V_2$ が対角行列になるように対角化できる．これから M 自身も **“bi-unitary” 変換**により

$$V_1^\dagger M V_2 = D \qquad (D: \text{対角行列}) \tag{7.13}$$

のように対角化できそうであるが，実際，数学的にそうした対角化が可能であることを証明できる．次の例題を参照されたい．

> **例題 7.1**　任意の $n \times n$ 正方行列 M は，2 つの $n \times n$ ユニタリー行列 $V_{1,2}$ を用いて $V_1^\dagger M V_2 = D$（D：対角行列）のように対角化できることを説明しなさい．

解　行列 M からエルミート行列 $M^\dagger M$ を作る．その規格化された固有ベクトル（縦ベクトル）を u_i とし，その固有値を λ_i とする．u_i を横に並べるとユニタリー行列になり，これを用いて $M^\dagger M$ を以下のように対角化することができる：

$$\begin{pmatrix} u_1^\dagger \\ u_2^\dagger \\ \vdots \\ u_n^\dagger \end{pmatrix} M^\dagger M\,(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{7.14}$$

これは n 個の縦ベクトル Mu_i が互いに直交し，そのノルムが λ_i であることを言っている．したがって $\lambda_i \geq 0$ なので，Mu_i を規格化し

$$\begin{aligned} &\left(Mu_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, Mu_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \ldots, Mu_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \\ &= M(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_n), \end{aligned} \tag{7.15}$$

とすると，v_i は規格直交系をなすために，この行列はユニタリー行列になる．よって，2 つのユニタリー行列を $V_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$，$V_2 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ と定義すれば，上式は

$$\begin{aligned} &MV_2\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right) = V_1 \\ \to\quad & V_1^\dagger M V_2 = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \end{aligned} \tag{7.16}$$

と同等であるが，これは M は $V_{1,2}$ を用いて対角化可能であることを言っている．□

この事実を用いて質量行列を (7.11) のユニタリー変換によって

$$V_{dL}^\dagger M_d^0 V_{dR} = M_d, \qquad M_d = \mathrm{diag}(m_d, m_s, \ldots), \tag{7.17}$$

$$V_{uL}^\dagger M_u^0 V_{uR} = M_u, \qquad M_u = \mathrm{diag}(m_u, m_c, \ldots), \tag{7.18}$$

のように対角化することができる．ここで固有値 m_d, m_u 等は d, u クォーク等の質量であり，これに対応して D, U は質量固有状態である，$d, u, \ldots$ 等を表

すことになる：

$$U_{L,R}=\begin{pmatrix}u_{L,R}\\c_{L,R}\\\vdots\end{pmatrix},\qquad D_{L,R}=\begin{pmatrix}d_{L,R}\\s_{L,R}\\\vdots\end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

こうしたユニタリー変換によってクォークの自由ラグランジアンは完全に“対角化”される．即ちディラック・スピノール $u=u_R+u_L$ 等を用いて

$$\bar{u}(i\partial\!\!\!/-m_u)u+\bar{d}(i\partial\!\!\!/-m_d)d+\cdots, \tag{7.20}$$

と表される．また，ゲージ相互作用のカレントのうちで，電気的に中性の J_Z^μ, J_{EM}^μ に関しては，同じ電荷，同じカイラリティーのクォークを結ぶので，運動項の場合と全く同様に，ユニタリー変換の下で不変になる．実際，(7.6), (7.7) の J_Z^μ, J_{EM}^μ に関しては

$$\overline{U_L^0}\gamma^\mu U_L^0=\overline{U_L}V_{uL}^\dagger V_{uL}\gamma^\mu U_L=\overline{U_L}\gamma^\mu U_L \tag{7.21}$$

等から，質量固有状態に移っても不変であることが容易に分かる．$\overline{U_L}\gamma^\mu U_L=\bar{u}_L\gamma^\mu u_L+\bar{c}_L\gamma^\mu c_L+\ldots$，等から**中性カレント**においてはフレーバーは変化せずに完全に保存され **FCNC は禁止**される．

しかしながら，**荷電カレント** (7.5) に関しては up-type と down-type 左巻クォークのユニタリー変換の違いによって不変とはならず

$$J_+^\mu=\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{U_L^0}\gamma^\mu D_L^0=\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{U_L}V_{cc}\gamma^\mu D_L,\qquad V_{cc}=V_{uL}^\dagger V_{dL}, \tag{7.22}$$

のように一般に非対角の行列 V_{cc} が現れる．こうして荷電カレントにおいては，もはやフレーバーは保存せず**フレーバー混合**が生じることが分かる．3 世代の場合には，この V_{cc} こそが**小林・益川行列 $\boldsymbol{V_{KM}}$** に他ならない．2 つのユニタリー行列の積なので V_{cc} は $n\times n$ の複素ユニタリー行列であり，複素行列で位相因子を持つことが **CP 対称性の破れ**を引き起こす要因になる．なお，仮に $SU(2)_L$ の 2 重項をなす左巻きクォークに関して，up-type と down-type のクォークのユニタリー変換 V_{uL} と V_{dL} が完全に同じであったとすると，実質的にはユニタリー変換しない場合と何ら変わりないことに注意しよう．例えば極端な例として 90 度の回転によって $u\to c, c\to -u, d\to s, s\to -d$ と変換したとしても，各 2 重項を構成するメンバーは実質的に同じである．よって，物理的に意味のあるフレーバー混合は V_{uL} と V_{dL} の差によってのみ生じることが分かる．これが V_{cc} が $V_{uL}^\dagger V_{dL}$ で表される理由である ($V_{uL}=V_{dL}$ だと $V_{cc}=I_n$ となる)．

さて，仮に質量行列を対角化したときに up-type クォークのすべての**質量が縮退**していたとすると，(7.18) の対角化においてユニタリー変換は一意的に決まらず，したがって質量固有状態も一意的には決まらないことになる．即ち $V_{uL}\to V_{uL}V$, $V_{uR}\to V_{uR}V$ のように共通のユニタリー行列 V を用いて更な

るユニタリー変換を行っても質量行列は対角化されたままである．元々フレーバーを区別するのは質量のみであったので，質量が縮退すると質量固有状態が決まらないというのは物理的には当然のことである．すると，この場合 (7.22) で定義される $V_{cc} = V_{uL}^{\dagger} V_{dL}$ において $V_{uL} = V_{dL}$ になるようにユニタリー変換を行えば $V_{cc} = I_n$ とすることができ，フレーバー混合を完全に消し去ることができる．これから学ぶのは，例として 3 世代の場合で言えば V_{KM} が非対角行列でフレーバー混合を持っている場合でも，仮にクォークの質量が縮退していると物理的には混合が無い場合と同等で，フレーバーは完全に保存される，ということである．クォークの質量は実際にはすべて異なるので縮退は無いが，この教訓から **FCNC 過程のようなフレーバーを保存しない過程はクォークの質量の差によって初めて生じる**ことが分かる．実際 **GIM 機構の神髄**はこの点にある．同様に，レプトン・セクターでのフレーバーが変化する $\nu_e \to \nu_\mu$ といった "**ニュートリノ振動**" という現象においても，小林・益川行列に対応するレプトン・セクターの行列である **MNS 行列**（現在議論されているタイプのニュートリノ振動を最初に提案した，牧二郎，中川昌美，坂田昌一に因んで，**牧・中川・坂田行列**と呼ばれる）の混合角がゼロでない場合でも仮にニュートリノ質量が完全に縮退するとニュートリノ振動は起こらない．特に標準模型のようにニュートリノ質量がゼロの場合にはニュートリノ振動は当然起きないことになる.（厳密には，磁場の効果によりニュートリノのカイラリティーが変化するニュートリノ振動のような場合には，この議論はそのままは適用できない.）

7.2　2 世代模型では CP 対称性が破れないということ

2.4 節で説明したように，小林・益川模型は，1964 年にクローニン・フィッチらによって発見された中性 K 中間子の崩壊 $K_L \to \pi^+\pi^-$ によって初めて明らかにされた **CP 対称性のわずかな破れ**を，繰り込み可能で予言力のあるゲージ理論の枠内で説明することを目指して構築されたものであった．論文では CP 対称性を破るための自然なシナリオとして，(他のいくつかのシナリオと共に) 世代数を 3 に拡張することが提唱され，3×3 の**小林・益川行列 $\boldsymbol{V_{KM}}$** も与えられている．

この節ではまず 2 世代模型では何故 CP 対称性が破れ得ないのかについて議論し，それから逆に 3 世代の必要性を理解することにしよう．まずは一般に n 世代の場合について，(7.22) に与えられるユニタリー行列 V_{cc} がいくつの自由度（パラメター）を用いて記述されるかについて考えてみよう．次の例題を参照されたい．

例題 7.2　$n \times n$ ユニタリー行列 U はいくつの自由度，即ち独立な実パラメターを持つか議論しなさい．同様に $n \times n$ の直交行列の自由度についても議

論しなさい.

解 ユニタリー行列 U は n^2 個の複素数の行列要素を持つので，元々 $2n^2$ 個の実パラメターで記述される．しかしながら，これらすべてが独立ではない．それはユニタリー行列の満たすべき条件

$$(UU^\dagger)_{ij} = U_{ik}U^*_{jk} = \delta_{ij} \tag{7.23}$$

が課されるからである．$i = j$ の場合には，(7.23) は n 個の実数の条件式を与える．また $i \neq j$ の場合には ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 個の複素数の条件式を与える．よって，これらの条件が課された後に残る独立な実数の自由度は

$$2n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 \tag{7.24}$$

となる．これは群 $U(n)$ の次元（生成子の数）でもある．

次に直交行列について考えよう．直交行列は実数に限定されたユニタリー行列と見なせるので，(7.24) の計算を少し変更して，その自由度は

$$n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{7.25}$$

即ち ${}_n\mathrm{C}_2$ となる．この自由度は直交群 $O(n)$，n 次元空間での回転のなす群 $SO(n)$ の次元でもある．実際，n 個の座標の中から異なる 2 個の座標（例えば (x, y)）を選ぶと，それらで決まる平面（例えば x–y 平面）上の回転に対応づけられる．${}_n\mathrm{C}_2$ はそうした独立な回転の数と見なせる． □

$U(n)$ には $SO(n)$ も含まれるので，n^2 個のパラメターのうちで $\frac{n(n-1)}{2}$ 個は回転角である．したがって，残りの

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \tag{7.26}$$

個だけ位相因子が含まれることになる．

こうした数学的準備を基に，2 世代模型の場合に何故 CP 対称性が破れ得ないのか考えてみよう．上の議論から $n = 2$ の場合にはフレーバー混合の 2×2 ユニタリー行列 V_{cc} は，${}_n\mathrm{C}_2 = 1$ 個の角度（カビボ角 θ_c に対応）と $\frac{n(n+1)}{2} = 3$ 個の位相因子で書かれるはずである．実際，以下のように角 θ_c と 3 つの位相 ϕ_i $(i = 1, 2, 3)$ を用いて具体的に表すことができる（この他にも可能な書き方は色々とあるが）：

$$V_{cc} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c \; e^{i\phi_1} & \sin\theta_c \; e^{i\phi_2} \\ -\sin\theta_c \; e^{i\phi_3} & \cos\theta_c \; e^{i(-\phi_1+\phi_2+\phi_3)} \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

つまり，この場合の荷電カレントは

$$J_\mu^+ = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_c \; e^{i\phi_1} & \sin\theta_c \; e^{i\phi_2} \\ -\sin\theta_c \; e^{i\phi_3} & \cos\theta_c \; e^{i(-\phi_1+\phi_2+\phi_3)} \end{pmatrix} \gamma_\mu L \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

となる．既に 3.4 節で議論したように CP 対称性の破れを実現するには相互作用の結合定数が複素数で位相因子を含むことが必要条件となる．実際，(3.39) の下の議論で述べたように，仮にフェルミ結合定数 G_F が複素数であるとラグランジアンは定義された CP 変換の下で不変とならない．G_F は荷電相互作用により生じるので，荷電相互作用に現れる行列である V_{cc} が位相を持てば CP 対称性は破れそうである．(7.28) は 3 つも位相を持っているので CP 対称性を破るには十分であるように思われる．

しかし，こうした議論には注意が必要である．小林・益川は，2 世代模型の場合には一見 CP 対称性を破る位相があるようでも物理的には CP 対称性は破れ得ないことを見抜いたのであった．それは，クォークには場の位相を変える **"re-phasing"** と呼ばれる変換の自由度が残されているからである．実際，各クォークの場 q 毎に

$$q \quad \to \quad e^{i\phi_q} q \qquad (\phi_q : \text{実数}) \tag{7.29}$$

という位相変換を考えると，これらの変換の下でクォークの自由ラグランジアン (7.20) は明らかに不変である：

$$\bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)q \quad \to \quad \overline{(e^{i\phi_q} q)}(i\partial\!\!\!/ - m)(e^{i\phi_q} q) = \bar{q}(i\partial\!\!\!/ - m)q. \tag{7.30}$$

すると，この re-phasing の自由度を用いて u, c クォークについて

$$u \quad \to \quad e^{i\phi_1} u, \qquad c \quad \to \quad e^{i\phi_3} c, \tag{7.31}$$

という変換を行うと (7.28) の V_{cc} の 1 列目から位相が除去されることが分かる：

$$V_{cc} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \; e^{i(-\phi_1+\phi_2)} \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \; e^{i(-\phi_1+\phi_2)} \end{pmatrix}. \tag{7.32}$$

ここで 2 列目には位相が残るものの，その位相 $-\phi_1 + \phi_2$ は共通である．共通の位相となる理由は，ユニタリー行列が満たすべき 1 列目と 2 列目の縦ベクトルの間の直交性である．位相が異なると直交条件を満たすことができないのである．最後に，この共通の位相は s クォークの次のような位相変換で消去できる．

$$\begin{aligned} s \quad &\to \quad e^{i(\phi_1-\phi_2)} s, \\ V_{cc} \quad &\to \quad \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

こうして，re-phasing 後のクォークの場を用いて書くと，J_μ^+ から位相因子は

完全に消え，ラグランジアンから位相，したがって複素数の結合定数は消滅する．よって，**2 世代模型では CP 対称性は破れない**，と結論づけるべきであり，V_{cc} に最初にあった 3 つの位相は re-phasing によって変更を受ける非物理的な自由度であるということになる．つまり，結合定数に位相が存在することは CP 対称性が破れるための必要条件ではあるが，十分条件でもあるとは限らない，ということである．こうして，小林・益川は **CP 対称性を破るためには 3 世代 (以上) のクォークが必要**である，という非常に重要な発見に到達したのである．

上の議論では，V_{cc} の (u,d) 成分，$(V_{cc})_{ud}$ の位相 ϕ_1 は re-phasing によって消去することも可能であり，単に $(V_{cc})_{ud}$ に位相があるからといって，それをもってこの行列要素の関わる物理量に CP 対称性の破れが現れるとは言えない．すると，生じる自然な疑問は，re-phasing に依存しない（どのような re-phasing でも消えない) CP 対称性の破れを示す V_{cc} から作られる物理量は何であるか？ということである．ここでヒントになるのが，2 世代の例の場合に，(7.32) で re-phasing 後の行列の 2 列目が共通の位相を持ち，したがって CP 対称性が破れなかった理由は，ユニタリー行列である V_{cc} の 1 列目と 2 列目の直交条件

$$(V_{cc})_{ud}(V_{cc})^*_{us} + (V_{cc})_{cd}(V_{cc})^*_{cs} = 0 \tag{7.34}$$

の存在であったことである．2 つの状態が独立で直交するという事実は基底のとり方に依らないので，クォークの場の re-phasing を行ってもこの直交条件は不変である．実際 (7.34) において，左辺は u, c クォークの re-phasing の下で明らかに不変であり，また d, s クォークの re-phasinig $d \to e^{i\phi_d} d$, $s \to e^{i\phi_s} s$ の下では

$$\begin{aligned} &(V_{cc})_{ud}(V_{cc})^*_{us} + (V_{cc})_{cd}(V_{cc})^*_{cs} \\ \to \quad & e^{i(\phi_d - \phi_s)} \left\{(V_{cc})_{ud}(V_{cc})^*_{us} + (V_{cc})_{cd}(V_{cc})^*_{cs}\right\} \end{aligned} \tag{7.35}$$

のように変換するが，ゼロであるものは位相変換しても当然ゼロであり，直交性は re-phasing 不変な概念である．

ここで (7.34) の条件を複素平面上で表すことを考えよう．その理由は，CP 変換は

$$\mathrm{CP}: \quad (V_{cc})_{i\alpha} \quad \to \quad (V_{cc})^*_{i\alpha} \qquad (i = u, c, \ldots\,;\ \alpha = d, s, \ldots) \tag{7.36}$$

であり，複素平面上では実軸に関する折り返し（線対称変換）に他ならず CP 変換を幾何学的に考えることができるからである．なお，一般に複素数 $z = a + bi$ $(a, b:$ 実数) の複素共役変換 $z = a + bi \ \to \ z^* = a - ib$ は，複素平面上では

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{7.37}$$

という行列式が -1 の行列による変換であるので離散的変換になっていることに

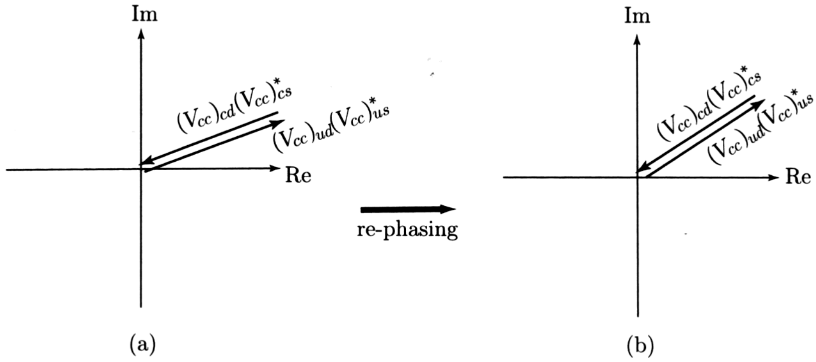


図 7.1　2 世代模型の場合のユニタリティーを表す "二角形".

注意しよう．これは CP 変換が元々離散的変換であるので当然とも言える．V_{cc} のユニタリティーから来る (7.34) の直交条件を $(V_{cc})_{ud}(V_{cc})^*_{us}$ と $(V_{cc})_{cd}(V_{cc})^*_{cs}$ のそれぞれに対応する複素平面上のベクトルを用いて表すと，2 つのベクトルの和がゼロなので，これらのベクトルは重なった方向が逆の線分になり，いわば "二角形"（三角形で 1 辺の長さをゼロとしたもの）を形成することになる（図 7.1(a) 参照）．

また，re-phasing を行うと (7.35) から分かるようにこれらのベクトルは原点の周りで回転する（図 7.1(b) 参照）．よって re-phasing の位相 $\phi_d - \phi_s$ を適当に選ぶと "二角形" を実軸上に持って行くことができる．すると，実軸に関して折り返しても当然 "二角形" は不変なので，もはや CP 対称性は破れないと結論せざるを得ない．少しだけ見方を変えると，図 7.1(a) のようなベクトルの配置だと，一見折り返しの下で線分は変化してしまい CP 対称性は破れているように見えるが，実軸に関して折り返した後に原点の周りで適当に回転すれば元の線分に必ず一致させることができるので，その意味で CP 不変であるとも言える．

ここまで来ると，**小林・益川模型**，**小林・益川行列**の詳細を議論しなくても，2 世代でうまく行かなかった CP 対称性の破れが何故 3 世代では実現するのか予想がつく．まず 3 世代の場合の荷電カレントの行列 V_{cc} が**小林・益川行列**なので，これからは $\boldsymbol{V_{KM}}$ と書くことにする：

$$V_{cc} \quad \rightarrow \quad V_{KM}. \tag{7.38}$$

小林・益川行列の α 列目と β 列目 $(\alpha, \beta = d, s, b; \alpha \neq \beta)$ の直交条件

$$(V_{KM})_{u\alpha}(V_{KM})^*_{u\beta} + (V_{KM})_{c\alpha}(V_{KM})^*_{c\beta} + (V_{KM})_{t\alpha}(V_{KM})^*_{t\beta} = 0 \tag{7.39}$$

は 3 世代を反映して図 7.2 に見られるように閉じた三角形を形成する．

図 7.2 の三角形 ABC は CP 変換で三角形 A'B'C' に変換されるが，明らかに

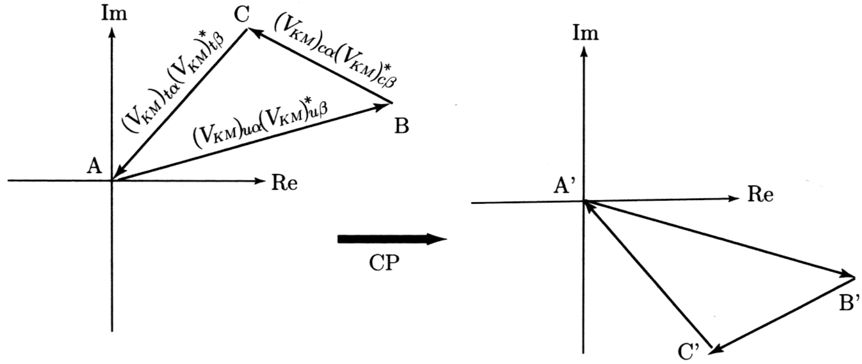


図 7.2　小林・益川模型におけるユニタリー三角形.

三角形 A'B'C' を原点の周りで回転しても例外的状況を除き，もはや ABC には重ならない．これが，2 世代と 3 世代の場合の本質的な違いである．つまり，"二角形" と三角形は本質的に違う！　ということである．例外的状況とは，内角の一つがゼロになり，したがって三角形が線分に閉じてしまう場合である．この場合 CP 対称性は破れないことになるが，この簡単な議論から三角形の内角が CP 対称性の破れを表す物理量に対応することが予想される．実際，後で議論するように，日本の KEK 等で測定された B 中間子系での CP 非対称性は，正にこの内角（正確にはその 2 倍角の sin）の測定に他ならないことが後ほど分かる．

この三角形は名前が付いていて，小林・益川行列のユニタリティーを表しているので「**ユニタリー三角形 (unitarity triangle)**」と呼ばれる．ユニタリー三角形には α, β として d, s, b のどの 2 つのクォークをとるかによって 3 通りの場合があることに対応して 3 個の独立なものが存在するが，実は 3 つの三角形の面積は完全に同じであり，小林・益川模型における普遍的な CP 対称性の破れの指標となっている．この面積も re-phasing 不変な量であることに注意しよう．実際，re-phasing でユニタリー三角形は回転するが，その形と面積は明らかに不変である．この面積の 2 倍が，後で議論する "**ヤールスコッグ・パラメター (Jarlskog parameter)**" と呼ばれるものである．

なお，この議論から分かるように，4 世代以上の場合でも，四角形は三角形を 2 つ組み合わせてできるのでやはり折り返しの下で図形は不変ではなく CP 対称性は破れることになる．これは以下の議論でも確かめられ，**CP 対称性の破れは世代数 n が 3 以上のときに実現**することが分かる．

7.3　小林・益川模型

いよいよ**小林・益川の 3 世代模型** [1] の議論に入ろう．前節で既にユニタリー三角形の概念を用いて 3 世代では CP 対称性が破れるはずであると議論した．

ここでは具体的に CP 対称性を破る位相（“**CP 位相**” と呼ぶことにしよう）が **re-phasing** の後でも残ることを示し，またその位相がどのように荷電カレントの小林・益川行列に現れるのかについて議論しよう．

まず一般の n 世代の場合について考えると，前節 (7.26) で示したようにユニタリー行列 V_{cc} （(7.22) に定義）には $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の位相が一般に存在する．しかし 2 世代の場合に具体的に見たように，これらすべてが物理的意味を持つのではなく re-phasing によって消去した後にいくつの位相が物理的に意味のあるものとして残るかが問題である．2 世代の場合と同様に，ユニタリー行列の 1 列目に存在する位相は，up-type クォークの $u, c, \ldots$ の適当な re-phasing によって完全に消去することが可能である．また，同様に 1 行目の位相は down-type クォーク $s, \ldots$ の適当な re-phasing によって完全に消去可能である．ここで d クォークの re-phasing は，せっかく実数にした 1 列目を再び複素数にしてしまうので禁止されることに注意しよう．こうして，全体として 1 列目と 1 行目を合わせて $n + (n-1) = 2n-1$ 個の位相が re-phasing によって消去可能である．しかし，もちろん実数にするのは 1 行目，1 列目に限る必要はない．その意味で次のような議論のほうがより一般的なものと言えるかもしれない．即ち，up-type, down-type 合わせて計 $2n$ 個のクォークの re-phasing の自由度があるが，ユニタリー行列は，すべてのクォークについて同じ位相（overall phase と呼ばれる）で re-phasing を行う $q_i \to e^{i\phi} q_i$ $(i = u, d, c, s, \ldots)$ という変換の下で変化しないので，この自由度だけは寄与しない．こうして行列の位相を消去できる自由度は $2n-1$ になる．

結局，ユニタリー行列 V_{cc} の位相のうちで **re-phasing の後に残る物理的な CP 位相の数は**

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{7.40}$$

となる．元のユニタリー行列の自由度 n^2 から出発してまとめると，

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - (2n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{7.41}$$

と書くこともできる．よって，明らかに $n = 1$, 2, 即ち**世代数が 1 や 2 の場合**には物理的に意味のある CP 位相は現れず，**CP 対称性は破れない**ことが分かる．逆に**世代数が 3 以上であれば CP 対称性を破ることが可能**である．これが**小林・益川の非常に重要な発見**であった．また，もう一つ重要なこととして 3 世代模型の場合には，(7.41) で $n = 3$ とすると 1 つだけ CP 位相が存在することになる．これが，先に述べたような 3 つのユニタリー三角形の面積はすべて等しく，**ヤールスコッグ・パラメター**（の半分）に一致するという事実に呼応している．その意味でヤールスコッグ・パラメター J が re-phasing 不変な，小林・益川模型における CP 対称性の破れを司る唯一の物理量であるという言

い方もできる．

それでは，実際に 3 世代の場合の**小林・益川行列 $\boldsymbol{V_{KM}}$** を，物理的な自由度である **3 つの混合角**（$SO(3)$ を記述する 3 つの回転角．剛体の運動を記述するオイラー角に対応）と **1 つの CP 位相**を用いて具体的に表してみよう．小林・益川の論文に与えられた行列は，1 行目と 1 列目が実数となるような

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{7.42}$$

というものであった．ここで $c_i = \cos\theta_i$，$s_i = \sin\theta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ という略記を用いており，θ_i が 3 つの世代間の混合角である．また $\boldsymbol{\delta}$ が re-phasing の後に 1 つだけ残る CP 対称性を破る **CP 位相**に他ならない．ヤールスコッグ・パラメターは後述するように $\sin\delta$ を用いて表される（(7.51) 参照）．どこに CP 位相が現れるかは re-phasing の仕方に依存するので，この原論文の行列の他にも V_{KM} のパラメターによる表示（パラメター化）の仕方は色々と可能である．最近よく用いられる **Particle Data Group** が採用しているパラメター化は 3 つの混合角 θ_{12}，θ_{23}，θ_{13} と CP 位相 δ_{13} を用いた次のようなものである．

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \tag{7.43}$$

もう一つよく用いられるものが**ウォルフェンシュタイン (Wolfenstein) によるパラメター化**である．3 つの世代間の混合角には大きさに階層性があり，大雑把に言うと $\sin\theta_c \simeq 0.22$ を λ とおいて，

$$s_{12} = \lambda, \qquad s_{23} \sim \lambda^2, \qquad s_{13} \sim \lambda^3 \tag{7.44}$$

の程度であることが分かっている．そこでウォルフェンシュタインは，こうした階層性が明白になるような次のような**近似的なパラメター化**を提唱した：

$$V_{KM} \simeq \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.45}$$

ここで実パラメター $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{\eta}$ は $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ **(1)** の量であり，$\boldsymbol{\eta}$ は **CP 位相に対応**する．(7.45) は $\mathcal{O}(\lambda^3)$ まで近似的にユニタリティーを満たしていることが分かる．

3世代の場合の荷電カレント相互作用の項は，**小林・益川行列 $\boldsymbol{V_{KM}}$** を用いて

$$\mathcal{L}_{c.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} & \bar{t} \end{pmatrix} V_{KM}\ \gamma_\mu L \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} W^{+\mu} + h.c. \tag{7.46}$$

と表されるが，ここに現れるCP位相（元の論文では δ）の存在のために，例えば $K_L \to \pi\pi$ 崩壊のようなCP対称性を破る事象が生じることになる．

更には，10章で議論するが，この宇宙に**物質**のみが存在し，ディラックが理論的に予言した**反物質**が存在しないのはCP対称性が破れているからである（他の条件も必要であるが）．CP変換は，スピンの向きを考慮しなければ粒子と反粒子を入れ替える変換なので，もしCP対称性が存在すると物資と反物質は宇宙に等量存在してしまい，それらは例えば $e^+ + e^- \to 2\gamma$（γ: 光子）のように**対消滅**して完全に宇宙から消えてしまうであろう．つまり，CP対称性の破れは，そもそも我々が存在することを保証する必要条件（ただし十分条件ではない）なのである．小林・益川模型は，こうしたCP対称性の破れを整合性のあるゲージ理論の枠組みを用いて初めて説明した理論である．

前節で述べたように，ユニタリー三角形の形状や面積はre-phasing不変であり，その面積の2倍はヤールスコッグ (Jarlskog)・パラメターと呼ばれることを述べた．そこで，標準模型でCP対称性の破れを司るこの**ヤールスコッグ・パラメター**というものが具体的にどのように小林・益川行列を用いて表されるのか見てみよう．

(7.39) で $\alpha = d,\ \beta = s$ とした場合のユニタリー三角形を例にとると，この三角形の面積の2倍，即ち三角形の2辺を隣り合う辺とする平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned} & |(V_{KM})_{ud}(V_{KM})^*_{us}|\,|(V_{KM})_{cd}(V_{KM})^*_{cs}|\,\sin\theta \\ = \ & |\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{ud}(V_{KM})^*_{cd}(V_{KM})_{cs}(V_{KM})^*_{us}\}| \end{aligned} \tag{7.47}$$

と表されることが分かる．ここで θ は $(V_{KM})_{ud}(V_{KM})^*_{us}$ と $(V_{KM})_{cd}(V_{KM})^*_{cs}$ を表す2辺のなす角である．(7.47) は

$$\begin{aligned} & \left|\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{i\alpha}(V_{KM})^*_{j\alpha}(V_{KM})_{j\beta}(V_{KM})^*_{i\beta}\}\right| \\ & \quad (i, j = u, c, t,\ \alpha, \beta = d, s, b;\ i \neq j,\ \alpha \neq \beta) \end{aligned} \tag{7.48}$$

という形をしていることが分かる．ここで例えば添字 i の付いた行列要素 $(V_{KM})_{i\alpha}$ と $(V_{KM})^*_{i\beta}$ は片方を複素共役にした形で入っているので，その掛け算は自動的に i のクォークのre-phasingの下で不変であることが分かる．同様に，関与するすべてのクォークのre-phasingの下で (7.48) は不変である．また，(7.48) で $i = j$ あるいは $\alpha = \beta$ とすると明らかに虚数部分は自動的に消えてしまうことが分かるので $i \neq j$ かつ $\alpha \neq \beta$ の場合のみ意味があることが分かる．

それでも添字の組合せは $3 \times 3 = 9$ 通りあるので 9 種類の異なる面積がありそうである．しかし一方で，小林・益川模型では CP 位相は δ のみであり，実際には (7.48) は $i \neq j$, $\alpha \neq \beta$ のとり方に依らないことが予想される．まず，(α, β) を (d, s) のように固定すると，このときできる三角形の面積は，どの 2 辺を用いて表しても当然等しいので (7.48) は $i \neq j$ の 3 つのとり方に依らない．次に (α, β) のとり方を変えると，3 個の独立な形状の違う三角形が得られるが，これらの面積はすべて等しいことが次のように示される．例えば，**KEK の B 工場 (factory) 実験**等で検証され，小林・益川理論の正しさを立証した **CP 非対称性**に関わる $(\alpha, \beta) = (d, b)$ の場合を考えると，小林・益川行列の列の間の直交性から，任意の (i, j) の組に関して

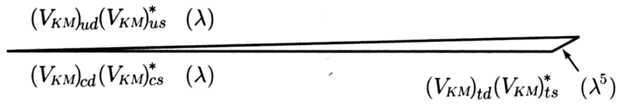
$$
\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{id}(V_{KM})^*_{jd}(V_{KM})_{jb}(V_{KM})^*_{ib}\}\right| \\
=&\ \left|\mathrm{Im}\{-(V_{KM})_{id}(V_{KM})^*_{jd}[(V_{KM})_{jd}(V_{KM})^*_{id} + (V_{KM})_{js}(V_{KM})^*_{is}]\}\right| \\
=&\ \left|\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{id}(V_{KM})^*_{jd}(V_{KM})_{js}(V_{KM})^*_{is}\}\right| \qquad (7.49)
\end{aligned}
$$

となるので，(d, s) の三角形の場合と面積は同一であることが分かる．$(\alpha, \beta) = (s, b)$ の三角形に関しても同様である．こうして，(d, s), (d, b), (s, b) の 3 つの三角形は，その形状は一般に皆異なるものの，それらの面積はすべて等しいことが示された．こうして決まるパラメターを**ヤールスコッグ・パラメター J** と言う：

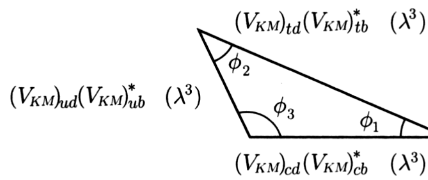
$$
J = \left|\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{i\alpha}(V_{KM})^*_{j\alpha}(V_{KM})_{j\beta}(V_{KM})^*_{i\beta}\}\right| \qquad (\alpha \neq \beta,\ i \neq j). \tag{7.50}
$$

一方で，形状が異なるということは当然三角形の内角は異なることになるわけで，CP 非対称性の度合いは (d, s), (d, b), (s, b) のそれぞれについて異なることになる．例えば (d, s) と (d, b) に関する 2 つの三角形の大体の形状を描くと図 7.3 のようである．図において，三角形の辺の長さは正確ではないが，それぞれ（ウォルフェンシュタインのパラメター化に現れる）λ のベキでそのオーダーが示されている．

図 7.3 において，(d, s) システムの三角形は (ア) であるが，図に見られるように $\mathcal{O}(\lambda)$ の長い 2 つの辺と $\mathcal{O}(\lambda^5)$ の非常に短い辺でできていて，三角形はほとんど閉じた形状であり，三角形の 1 つの内角は $\mathcal{O}(\lambda^4)$ の小さな角になる．CP 対称性の破れの効果は三角形が閉じると消えるので，このことは (d, s) システムである中性 K 中間子における CP 非対称性は小さいことを示唆している．実際 $K_L \to \pi\pi$ の確率振幅の大きさは CP 対称性の破れを伴わない "普通の" 崩壊の場合の 10^{-3} 倍程度の小さなものであることが分かっているが，この比はほぼ $\mathcal{O}(\lambda^4)$ である．これに対して（イ）の (d, b) のシステムの三角形では辺の長さは皆 λ^3 のオーダーで内角は 1 のオーダーになるので，**中性 B_d 中間**



（ア）



（イ）

図 7.3 （ア） (d, s) システム，（イ） (d, b) システムにおけるユニタリー三角形の形状．三角形の大きさは正確ではない．

子における CP 非対称性は $\mathcal{O}(1)$，即ち 10% 程度の大きなものになり得ることが予想される．実際，KEK において中性 B 中間子 (B_d) を用いて小林・益川模型の検証が行われたのは，この大きな CP 非対称性を検証するためのものであった．それまでに知られていた K 中間子系での CP 対称性の破れ以外に，B 中間子系でも CP 対称性の破れが実証できれば，小林・益川模型を強く支持することになると考えられたのである．

例えば $|\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{ud}(V_{KM})^*_{td}(V_{KM})_{tb}(V_{KM})^*_{ub}\}|$ を (7.42), (7.45) を用いて計算して具体的にヤールスコッグ・パラメターを求めると

$$
\begin{aligned}
J &= \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\delta \\
&\simeq A^2\lambda^6\eta \simeq 3\times 10^{-5} \qquad (7.51)
\end{aligned}
$$

が得られる．当然のように J は CP 位相 δ が消えると消えるようになっているが，更に分かることは，δ が 0 でなくとも 3 つの混合角 θ_i $(i = 1, 2, 3)$ のどれか 1 つでも 0 になると J が消えるということである．つまり，小林・益川模型では CP 対称性を破るためには，CP 位相の存在は必要条件であるがそれだけでは十分でなく，**3 世代の間の（フレーバー）混合も必要**であるということである．ごく粗っぽく言えば，小林・益川模型では 3 世代すべてが密接に絡んで初めて CP 対称性が破れるので，1 つでも混合角が消えるといわば 2 世代的になり CP 対称性が破れなくなる，というように解釈できる．

フレーバー混合が必要であるということは，小林・益川模型においては **CP 対称性の破れは FCNC 過程と共に現れる**ことを強く示唆している．実際，中性の K 中間子，B 中間子系で観測されている CP 対称性を破る崩壊や CP 非対称性は $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ や $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ といった FCNC 過程における CP 対称性の破れの効果によって生じていると理解されている．一方で，GIM 機構の議論にお

いて FCNC 過程の確率振幅が $(m_c^2 - m_u^2)/M_W^2$ といったクォーク質量（2 乗）の差により生じること，したがってクォーク質量に縮退があれば生じないことを見た．よって，もしも**クォーク質量が完全に縮退していれば CP 対称性の破れは生じないことになる**．実際，7.1 節の最後のほうで，もしもクォーク質量が完全に縮退していれば V_{KM} を単位行列とすることができて，フレーバー混合は意味をなさないことを議論した．すべてのクォークではないにしても，仮に $m_u = m_c$ であったとすると，これら 2 世代の間の混合は意味をなさないので，3 つの混合角のうちの 1 つをゼロに持ってゆけそうである．すると上述の議論から CP 対称性の破れは消滅することになる．つまり，CP 対称性を破るには CP 位相の存在，混合角のすべてがゼロでない，という 2 つの条件の他に，up-type, down-type のそれぞれのセクターにおいて**3 つのクォークの質量がすべて異なることも必要**であると予想される．実際，これらすべての条件を満たすことが CP 対称性が破れるための必要十分条件であることを次のように示すことができる．

まず分かることは，CP 位相，混合角のみならずクォーク質量も関与するとなると，小林・益川行列のみを考えていてもだめであるということである．元々，CP 位相，フレーバー混合およびクォーク質量はすべて湯川結合，それから生じるクォークの質量行列に起源があるので，質量固有状態ではなく弱固有状態で考え，CP 位相等はゲージ相互作用ではなく質量行列 M_u^0, M_d^0（(7.9) 式）が起源であることを明白にした形で考えることにしよう．ここでクォークに関する物理量は図 7.4 に例を示すように，閉じたフェルミオンのループを持つファインマン図で表すことができることに注意しよう．それはファインマン図から求めた確率振幅の絶対値 2 乗を計算する際に，図 7.4 の場合だと

$$\begin{aligned} &|\bar{u}_1(p_1)\gamma_\mu u_2(p_2)W^{+\mu}|^2 \\ &= \mathrm{Tr}\left(u_1(p_1)\bar{u}_1(p_1)\gamma_\mu u_2(p_2)\bar{u}_2(p_2)\gamma_\nu\right) \times W^{+\mu}W^{-\nu} \end{aligned} \tag{7.52}$$

のような計算になり，トレース (Tr) は閉じたフェルミオン・ループを表していることからも分かる．ここで $u_{1,2}$ は u, d クォークのスピノールを表している．

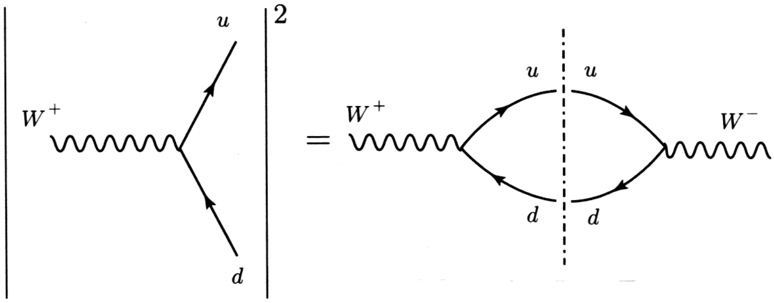


図 7.4　確率振幅の絶対値 2 乗とカットされたループを持つファインマン図．

ただし，本来ループ中の粒子は中間状態（不確定性から許される仮想状態）なのでその運動量について積分すべきであるが，この場合のフェルミオンはon-shell条件を満たす実状態を表しているので，運動量は限定されることに注意しよう．これを，図に示すようにフェルミオンのループにカットを入れて表す．

フェルミオンのループを回っているのはクォークの弱固有状態だと見なすと，フェルミオンがループになっていることから，このファインマン図を計算すると質量項の挿入で現れる $M^0_{u,d}$ やそのエルミート共役の（3 行 3 列の）行列の積からなる単項式の和（多項式）のトレースに比例する．ここでは基本的構成要素である単項式について考えよう．実際には質量行列は単独では現れず，そのエルミート共役を掛け算して得られるエルミート行列

$$H_u = M^0_u (M^0_u)^\dagger, \qquad H_d = M^0_d (M^0_d)^\dagger \tag{7.53}$$

の形でトレースの中に現れることになる．それは，ループ中の荷電カレントによる相互作用頂点の所で u, d クォークが入れ替わり，$M^0_u, (M^0_u)^\dagger$ による単項式と $M^0_d, (M^0_d)^\dagger$ による単項式が入れ替わるが，荷電カレントは左巻きのクォークのみの相互作用なので，荷電カレント相互作用により生成された左巻きクォークが $(M^0_{u,d})^\dagger$ の挿入によって右巻きクォークに変換されたとしても，次の荷電カレント相互作用頂点に達する前に $M^0_{u,d}$ によって必ず左巻きクォークに戻る必要があるからである．本質的なことは右巻きのクォークに関する荷電カレント相互作用が存在しないということである．こうして，CP 対称性の破れによって生じる物理量は，その物理量に対応するフェルミオン・ループを持ったファインマン図から生じる $H_{u,d}$ の積で得られる単項式のトレースが CP 変換に対応する複素共役の下で不変でない，即ち虚部を持つことで生じるはずである．つまり，問題は，H_u と H_d からなる単項式でそのトレースが虚部を持つようなものはどのようなものか，ということに帰着する．なお，このファインマン図においてフェルミオンは閉じたループをなすので，こうして得られる物理量は自動的に re-phasing 不変な量になる．実際，ループ中のあるクォークに着目すると，そのクォークの生成と消滅は常にペアで現れるので，そのクォークの re-phasing の下で物理量は明らかに不変になる．

H_u と H_d からなる単項式の虚部は一般に次のように，それぞれの単項式 $P_i(H_d)$, $P'_i(H_u)$ を用いて書ける：

$$\mathrm{Im}\{\mathrm{Tr}[P_1(H_d)P'_1(H_u)P_2(H_d)P'_2(H_u)\cdots P_n(H_d)P'_n(H_u)]\}. \tag{7.54}$$

物理的には n は $W^\pm$ による相互作用頂点のペア（電荷の保存則から，これらの相互作用はループ中で交互に現れる）がループ中に何回現れるかという回数を表す．$n = 1$ という一番簡単な場合には虚部は現れないことが分かる：

$$\{\mathrm{Tr}[P_1(H_d)P_1'(H_u)]\}^* = \mathrm{Tr}[P_1(H_d)P_1'(H_u)]^\dagger$$
$$= \mathrm{Tr}[P_1'(H_u)P_1(H_d)] = \mathrm{Tr}[P_1(H_d)P_1'(H_u)]. \qquad (7.55)$$

これは，質量固有状態で考えると小林・益川行列の要素の絶対値 2 乗が虚部を持たないということと同等である：

$$\mathrm{Im}\{(V_{KM})_{i\alpha}(V_{KM})^*_{i\alpha}\} = 0 \qquad (i, \alpha \text{は固定する}). \qquad (7.56)$$

次に $n = 2$ の場合を考えてみると，単項式 $P_1(H_d)$ 等がすべて 1 次式の場合には $\mathrm{Im}\{\mathrm{Tr}[H_dH_uH_dH_u]\} = 0$ であることがすぐ分かり，次のような 1 次式と 2 次式の混ざったものから初めて虚部が現れることが分かる：

$$\mathrm{Im}\{\mathrm{Tr}[H_dH_uH_d^2H_u^2]\} \neq 0. \qquad (7.57)$$

$n = 2$ というのは，荷電カレントによる相互作用頂点がループ中に 4 回現れる場合に初めて CP 位相が消えずに残ることを言っていて，ヤールスコッグ・パラメターが小林・益川行列の要素の 4 次式で表されることにちょうど対応している．しかしながら，一方で $\mathrm{Im}\{\mathrm{Tr}[H_dH_uH_dH_u]\} = 0$ であるという事実は，CP 対称性が破れるためには，小林・益川行列の要素だけで書かれるこのパラメターの存在だけではなくクォーク質量に関係した何らかの条件が必要なことを示唆している．しかも (7.57) が $H_{u,d}$ の 6 次式であることから，この条件はクォーク質量 2 乗の 6 次式であることが予想される．実際，(7.57) の条件は次の条件と同値であることが数学的に分かる：

$$\det\{[H_u,\ H_d]\} \neq 0. \qquad (7.58)$$

(7.58) はすっきりした条件であり，少しその物理的意味を考察してみよう．仮に up-type クォークの質量がすべて縮退していてフレーバー対称性がある場合には H_u は単位行列に比例し，したがって $[H_u,\ H_d]$ は消える．これは，この場合には H_u と H_d が同時対角化できて小林・益川行列が単位行列になりフレーバー混合が生じず，したがって CP 対称性の破れも生じないことに相当する．交換関係がゼロでない場合でも CP 不変にはなり得る．素朴には CP 不変性の条件は H_u，H_d が実行列であることであるが，考えている弱基底では re-phasing より広いユニタリー変換，$H_u \to UH_uU^\dagger$，$H_d \to UH_dU^\dagger$（U：ユニタリー行列）の自由度が V_{KM} を変えることなく存在する．これは，3 世代分の 3 つの $SU(2)_L$ 2 重項の間でユニタリー変換を行っても，運動項とゲージ相互作用の項は不変であるということから生じる自由度である．よって CP 不変性があれば，ある U に対して

$$([H_u,\ H_d])^* = U[H_u,\ H_d]U^\dagger \qquad (7.59)$$

が成り立つはずである．ここで $([H_u,\ H_d])^* = -([H_u,\ H_d])^t$ に注意すると，

(7.59) の両辺の行列式を計算して

$$\det\{[H_u,\ H_d]\} = 0 \tag{7.60}$$

が得られる．この対偶をとり，(7.58) が言えれば CP 対称性が破れることになる．

さて，いよいよ (7.57) と (7.58) が同値であることを見てみよう．以下の例題を参照されたい．

> **例題 7.3** (7.57) と (7.58) は同値であることを示しなさい．

解 (7.57) の左辺は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\{\mathrm{Tr}[H_d H_u H_d^2 H_u^2]\} &= \frac{1}{2i}\{\mathrm{Tr}[H_d H_u H_d^2 H_u^2] - \mathrm{Tr}[(H_d H_u H_d^2 H_u^2)^\dagger]\} \\
&= \frac{1}{2i}\{\mathrm{Tr}[H_d H_u H_d^2 H_u^2] - \mathrm{Tr}[H_d^2 H_u H_d H_u^2]\} \\
&= \frac{1}{2i}\{\mathrm{Tr}[(H_d H_u H_d^2 - H_d^2 H_u H_d) H_u^2]\}
\end{aligned} \tag{7.61}$$

のように書き直せる．ここで (7.17), (7.18) より

$$H_u = V_{uL} M_u^2 V_{uL}^\dagger, \qquad H_d = V_{dL} M_d^2 V_{dL}^\dagger \tag{7.62}$$

であるが，Tr の中でユニタリー変換しても結果は変わらないので

$$\begin{aligned}
H_u &\to \hat{H}_u = V_{dL}^\dagger H_u V_{dL} = V_{KM}^\dagger M_u^2 V_{KM}, \\
H_d &\to \hat{H}_d = V_{dL}^\dagger H_d V_{dL} = M_d^2 = \mathrm{diag}(m_d^2, m_s^2, m_b^2)
\end{aligned} \tag{7.63}$$

とユニタリー変換を行い，(7.61) を $\hat{H}_{u,d}$ を用いて表すことにする．すると $(\hat{H}_d \hat{H}_u \hat{H}_d^2 - \hat{H}_d^2 \hat{H}_u \hat{H}_d)_{\alpha\beta} = (m_\alpha^2 m_\beta^4 - m_\alpha^4 m_\beta^2)(\hat{H}_u)_{\alpha\beta} = -m_\alpha^2 m_\beta^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2)(\hat{H}_u)_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = d, s, b)$ なので (7.57) は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i}\mathrm{Tr}[(H_d H_u H_d^2 - H_d^2 H_u H_d) H_u^2] \\
&= \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}[(\hat{H}_d \hat{H}_u \hat{H}_d^2 - \hat{H}_d^2 \hat{H}_u \hat{H}_d) \hat{H}_u^2] \\
&= -\frac{1}{6i}[m_\alpha^2 m_\beta^2 (m_\alpha^2 - m_\beta^2) + m_\beta^2 m_\gamma^2 (m_\beta^2 - m_\gamma^2) \\
&\quad + m_\gamma^2 m_\alpha^2 (m_\gamma^2 - m_\alpha^2)](\hat{H}_u)_{\alpha\beta}(\hat{H}_u)_{\beta\gamma}(\hat{H}_u)_{\gamma\alpha} \\
&= \frac{1}{6i}(m_\alpha^2 - m_\beta^2)(m_\beta^2 - m_\gamma^2)(m_\gamma^2 - m_\alpha^2)(\hat{H}_u)_{\alpha\beta}(\hat{H}_u)_{\beta\gamma}(\hat{H}_u)_{\gamma\alpha} \\
&= \frac{1}{2i}\det(\hat{M})
\end{aligned} \tag{7.64}$$

と書ける．ここで $(\hat{M})_{\alpha\beta} = (m_\alpha^2 - m_\beta^2)(\hat{H}_u)_{\alpha\beta}$ として行列 $\hat{M}$ $(\hat{M}^\dagger = -\hat{M})$ を定義した．また，重複する添字については和をとるという“アインシュタイ

ンの規則" を用いた.

一方で (7.58) の左辺は，同様に V_{dL} でのユニタリー変換を行うと

$$\det\{[H_u,\ H_d]\} = \det\{[\hat{H}_u,\ \hat{H}_d]\} = -\det(\hat{M}) \tag{7.65}$$

となる．ここで $([\hat{H}_u, \hat{H}_d])_{\alpha\beta} = -(m_\alpha^2 - m_\beta^2)(\hat{H}_u)_{\alpha\beta} = -\hat{M}_{\alpha\beta}$ を用いた．こうして (7.57) と (7.58) の条件は同値であることが分かる．なお $\hat{M}^\dagger = -\hat{M}$ より $\det(\hat{M})$ は純虚数であることに注意しよう． □

(7.58) の条件をクォーク質量と V_{KM} で表し，CP 対称性が破れるための必要十分条件を具体的に求めてみよう．少し面倒であるが，(7.58) の左辺は (7.65) より次のように表される．

$$\begin{aligned}\det\{[H_u,\ H_d]\} &= -\det(\hat{M}) = -\hat{M}_{ds}\hat{M}_{sb}\hat{M}_{bd} - \hat{M}_{db}\hat{M}_{sd}\hat{M}_{bs}\\ &= -2i\,\mathrm{Im}\{\hat{M}_{ds}\hat{M}_{sb}\hat{M}_{bd}\}\\ &= -2i\,(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)\,\mathrm{Im}\{(V_{KM})^*_{id}\,(V_{KM})_{is}\,m_i^2\\ &\quad \times (V_{KM})^*_{js}\,(V_{KM})_{jb}\,m_j^2\,(V_{KM})^*_{kb}\,(V_{KM})_{kd}\,m_k^2\}.\end{aligned} \tag{7.66}$$

ここで小林・益川行列がユニタリー行列であることより $(V_{KM})_{jb}(V_{KM})^*_{kb} = \delta_{jk} - (V_{KM})_{jd}(V_{KM})^*_{kd} - (V_{KM})_{js}(V_{KM})^*_{ks}$ が言えるので，これを代入すると (7.66) は

$$\begin{aligned}&-2i\,(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)\times\\ &\mathrm{Im}\{[\delta_{jk} - (V_{KM})_{jd}\,(V_{KM})^*_{kd} - (V_{KM})_{js}\,(V_{KM})^*_{ks}]\\ &\times (V_{KM})^*_{id}\,(V_{KM})_{is}\,(V_{KM})^*_{js}\,(V_{KM})_{kd}\}\,m_i^2 m_j^2 m_k^2\\ =&\ i\,(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)\\ &\times \mathrm{Im}\{(V_{KM})^*_{id}\,(V_{KM})_{is}\,(V_{KM})_{jd}\,(V_{KM})^*_{js}\}\,m_i^2 m_j^2\,(m_i^2 - m_j^2)\\ =&\ -2i\,\mathrm{Im}\{(V_{KM})^*_{ud}\,(V_{KM})_{us}\,(V_{KM})_{cd}\,(V_{KM})^*_{cs}\}\times\\ &(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2)\\ =&\ \pm 2i\,J\,(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)\\ &\times (m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2)\end{aligned} \tag{7.67}$$

となる．ここで，小林・益川行列のユニタリー性（異なる列の間の直交性），および $\mathrm{Im}\{(V_{KM})^*_{id}(V_{KM})_{is}(V_{KM})_{jd}(V_{KM})^*_{js}\}$ は $i \neq j$ のすべての組合せについて符号を除きヤールスコッグ・パラメター J に等しいという事実を用いた．

こうして最終的に，CP 対称性が破れるための必要十分条件 (7.58) は

$$
\begin{aligned}
&(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2)J \\
&= (m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2) \\
&\quad \times \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\delta \neq 0 \qquad (7.68)
\end{aligned}
$$

となる．最後の行では (7.51) を用いた．即ち，**CP 対称性を破るには，**単に CP 位相 δ が存在するだけでは十分ではなく，次のような **3 つの条件が同時に満たされる必要がある**ことが分かる．

- CP 対称性を破る CP 位相 δ が存在すること．
- 3 つの世代の間の 3 つの混合角 $\theta_{1,2,3}$ で表される混合がすべて存在すること．
- up-type, down-type のそれぞれのクォーク・セクターについて，3 つのクォークの質量がすべて異なること．

より正確には，2 番目の条件は $\sin 2\theta_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ である．これは以前議論したように，90 度の回転は物理的には回転が無いのと等価であるからである．さて，一見この 2 番目，3 番目の条件は事実としてはどちらも満たされているので，現実的には意味のない条件であるように思える．確かに，その意味で一番目の CP 位相をいかに導くかだけが自明でない問題であり，それに成功したのが小林・益川の理論であると言える．しかし，2, 3 番目の条件は小林・益川模型において CP 対称性を破る物理量は必ず，フレーバー対称性の破れを表すフレーバー混合とクォーク質量（2 乗）の差，ひいてはそれらにより引き起こされる「**フレーバーを変える中性カレント (FCNC) 過程**」に伴って現れる，ということを端的に物語っているのである．

第 8 章
小林・益川模型におけるFCNC過程と重いフェルミオンのnon-decoupling効果

6 章にて議論したように，中性 K 中間子系 $(K^0, \bar{K}^0)$ における**フレーバーの変わる中性カレント (Flavor Changing Neutral Current (FCNC)) 過程**は，その解析からグラショウらによる**チャーム (c) クォークの導入**や小林・益川による **3 世代の導入**がなされたことから分かるように，標準模型の確立にとって非常に重要な役割を演じた．FCNC 過程は tree レベルでは禁止され，また 6 章で議論した GIM 機構が働くためにその確率は一般に非常に小さく，**"希少過程 (rare process)"** と呼ばれる．

8.1　中性 K 中間子系における FCNC

パイ中間子同様，K^0 とその反粒子 $\bar{K}^0$ は s, d クォークおよびそれらの反粒子がスピンが 0，固有パリティーが -1 になるように束縛された**擬スカラー粒子**である：$\boldsymbol{K^0 \sim d\bar{s}}$, $\boldsymbol{\bar{K}^0 \sim s\bar{d}}$. K^0 と $\bar{K}^0$ の場の間の相対的な位相は本来自由に選べるが，CP 対称性を議論する際に便利なように 1 つに固定することにする．ここでは $CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$ と決めることにしよう．既に述べたように，ストレンジネス S という加算的量子数を，s, $\bar{s}$ クォークのみがそれぞれ $S=-1$, $S=1$ を持つものとして定義することができる．したがって K^0, $\bar{K}^0$ はそれぞれ $S=1$, -1 を持つことになる．K^0, $\bar{K}^0$ の FCNC 過程ではフレーバーの変化に伴い**ストレンジネスが変化**することになるが，その変化 (ΔS) の大きさによって以下のように分類することができる：

(a) $|\Delta S| = 2$:　　$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$,

(b) $|\Delta S| = 1$:　　$K_L \to \mu\bar{\mu}$,　　$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$.

(a) は 2 章，6 章にて少し議論した $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合である．また，$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ の崩壊においては，終状態のニュートリノは検出できないので 3 世代のニュートリノの寄与が足される．以下で (a), (b) のそれぞれについてもう少し詳しく

議論しよう.

(a) $|\boldsymbol{\Delta S}| = \mathbf{2}$ 過程

K^0 と $\bar{K}^0$ はお互いに粒子と反粒子の関係にあるので，3 章の最後で議論した CPT 定理によると，これらは全く同じ質量と寿命を持つ．K^0 と $\bar{K}^0$ は電気的に中性なので，電荷の保存と矛盾することなくこれらが混合することは可能であるが，クォークを束縛して中間子を形成する強い相互作用や電磁相互作用はフレーバー，したがってストレンジネス S を保存するので，これらの相互作用で K^0 と $\bar{K}^0$ が対で生成された場合,（弱い相互作用を無視すると）これらは混ざり合うことなく独立な状態として存在する．しかし，2 章，6 章で議論したように弱い相互作用，具体的には荷電カレントの相互作用においてはフレーバー対称性の破れによりストレンジネスはもはや保存されなくなり，この相互作用を通じて FCNC 過程が可能となる．そのため，縮退した静止質量を持つ K^0 と $\bar{K}^0$ の間に弱い相互作用によるわずかな混合が生じ，質量固有状態は K^0 と $\bar{K}^0$ が（ほぼ）1 : 1 で混ざった状態 K_L, K_S になる．この現象は 2.4 節で議論したように量子力学における二重井戸ポテンシャル（図 2.4）の場合に起きることとよく似ている．

具体的には，荷電カレント相互作用項 (7.46) においては S はせいぜい 1 変わるだけなので，$|\Delta S| = 2$ の過程である $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合を実現するためには 2 つの $W^\pm$ ゲージボソン，およびこれに付随する $\varphi^\pm$ を交換する図 8.1 の 1-loop のファインマン図で表されるような量子効果による過程が必要となる．図 8.1 において $\varphi^\pm$ は，ヒッグス機構においては $W^\pm$ が質量を持つ際に吸収される **"would-be" 南部・ゴールドストーン (NG) ボソン**である．NG ボソンはユニタリー・ゲージにおいては理論から消えてしまい物理的自由度としては残らないものと見なされるのであるが，自発的対称性の破れのあるゲージ理論では藤川和男・リー (B.W. Lee)・三田一郎 (A.I. Sanda) によって提唱された ξ という任意の値をとり得るゲージ・パラメターを導入して繰り込み可能性が見やすい形で量子論を展開する $\boldsymbol{R_\xi}$ **ゲージ**の手法が量子効果の計算においてよく用いられる [2]．R_ξ ゲージでは $\varphi^\pm$ の伝播子 (propagator) は $\frac{i}{k^2 - \frac{M_W^2}{\xi} + i\epsilon}$ のように 1 つの任意パラメター ξ を含み，例えばユニタリーゲージ $\xi \to 0$ では消えるようになっている．しかし，伝播子が簡単になる $\xi = 1$ のゲージ（**ファインマン・トゥフーフト (Feynman–'t Hooft) ゲージ**）ではゲージボソンと全く同じ質量を持つ粒子の伝播子となり，$W^\pm$ と $\varphi^\pm$ は同等に扱われる必要がある．こうした理由で図 8.1 では $W^\pm$ と $\varphi^\pm$ がペアで現れている．後に議論するように，この would-be NG ボソン交換の寄与は，そのフェルミオンとの結合がヒッグス粒子の場合と同様にフェルミオン質量に比例することから，**重いフェルミオンの non-decoupling 効果**において重要な寄与をする．

図 8.1 のファインマン図は "**箱型ダイアグラム (box diagram)**" と呼ばれ

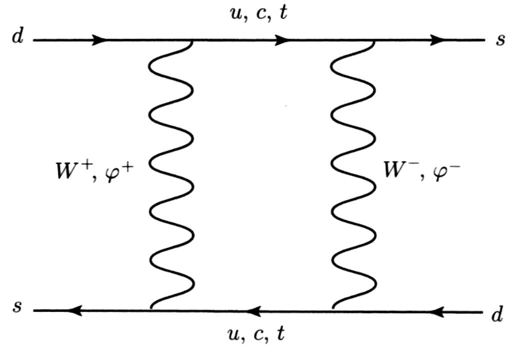


図 8.1 $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合に寄与する箱型ダイアグラム.

る．この混合の結果，縮退していた中性 K 中間子の質量が混合の振幅に比例してわずかに分離し，$K_{L,S}$ の質量差 Δm_K が生じる．

上で述べたことを静止した $(K^0, \bar{K}^0)$ の状態を基底とする 2×2 のハミルトニアンで表すと

$$H = \begin{pmatrix} M & M_{12} \\ M_{12}^* & M \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

のように書ける．ここで M は CPT 定理から導かれる K^0 と $\bar{K}^0$ の共通の質量であり，また M_{12} は箱型ダイアグラムから生じる $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合を表す項である．実際の K 中間子は不安定でパイ中間子等に崩壊可能である．このことを実効的に表すために，後でハミルトニアンに "反エルミート" の部分を導入するが（寿命の逆数，即ち崩壊しやすさを表す崩壊幅 Γ の半分に相当），ここではこうした "吸収項"（粒子の存在確率が崩壊によって "吸収されて" 減少するということ）は無視し，ハミルトニアンはエルミートであるとする．更に，簡単のためにしばらく小林・益川の CP 位相による CP 対称性の破れの効果も無視する．即ち，M_{12} は実数であるとする．

この場合 (8.1) の固有ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)^t$ なので，(2.23) に見られるように質量の確定した物理的な中性 K 中間子は

$$|K_1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle], \qquad |K_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle], \tag{8.2}$$

で与えられる．これらの質量は

$$m_1 = M - M_{12}, \qquad m_2 = M + M_{12}, \tag{8.3}$$

であり，K_1, K_2 の間に

$$\Delta m_K = 2M_{12} \tag{8.4}$$

という質量差が生じる．ここでは CP 対称性の破れを無視しているので当然であるが，これらの状態は確定した CP 固有値を持つ：

$$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle. \tag{8.5}$$

ここで CP は CP 変換を表す．実際には CP 対称性の破れ，および吸収項の存在により真のハミルトニアンの固有状態は K_1, K_2 とはわずかに異なる K_S, K_L という 2 つの状態になる．これらの質量差は精密に実測されており

$$\Delta m_K \equiv m_{K_L} - m_{K_S} = (3.483 \pm 0.006) \times 10^{-12}\ \mathrm{MeV} \tag{8.6}$$

という非常に小さなものである．

では，図 8.1 の箱形ダイアグラムから Δm_K をクォーク質量，および小林・益川行列の混合角を用いて求める手順を説明しよう．こうした箱形ダイアグラムの計算を Δm_K のデータと比較することで当時未発見であったチャームクォークの質量を正確に予言したのが，**ガイアールとリー (M. Gaillard, B.W. Lee) の論文**である [3]．彼らの計算では中間状態の up-type クォークの質量は荷電ゲージボソンの質量である弱スケール M_W よりずっと小さいという近似が用いられた．当時はクォークの世代は 2 世代のみ（4 つのクォークのみ）知られており，比較的重いチャームクォークの質量 m_c も実際に $m_c \ll M_W$ を満たすので，これは当時は十分に正当化される近似であった．実際，これらの計算によってチャームクォークの質量が，その発見以前にほぼ正確に予言されたことはよく知られている．FCNC の解析が未発見の新粒子や新しい理論の検証に役立つことを物語る典型的な例である．しかしながら，現在ではクォークには 3 世代があることが分かっており，またトップクォークはクォークの中で "異常に" 重く，その質量 $m_t \simeq 171$ (GeV) は M_W の 2 倍程度であるため，この近似計算は改訂される必要がある．即ち，**重いクォークの場合にも適用可能な正確な表式**を与えることが必要となる．

中間状態に現れる重いフェルミオンの効果を近似を用いずに任意の質量に関して正確に表すことのできる FCNC 過程の計算は 1981 年に，稲見武夫と著者 (T.Inami, C.S.Lim) によってなされた [4]．実際には当時はトップクォーク質量に関しても M_W より大きいとは予想されていなかったが，この計算は**重いフェルミオンの non-decoupling 効果**（後述）を検証するという理論的動機があってなされたものであったために，中間状態のフェルミオン質量を小さいとはせず正確な表式を導いたのである．その一つとして図 8.1 の箱型ダイアグラムから得られる（低エネルギー）実効ラグランジアンの表式も求められた．現在ではベータ崩壊は図 5.3 のファインマンダイアグラムで表される $W^{\pm}$ ゲージボソンを交換する過程として理解されているが，標準模型が現れる前のフェルミの理論では 4 つのフェルミオンが関与する時空の一点で起きる "**4 フェルミ相互作用**" と呼ばれるラグランジアン (3.25) で記述されていた．これは，標準模型の立場からは (5.73)〜(5.75) で議論したようにベータ崩壊のエネルギースケールが M_W よりずっと小さいことから得られる低エネルギー実効ラグラン

ジアンと見なすことができる．同様にして，箱形ダイアグラムを計算した結果を，外線の down-type クォークに関する **$|\Delta S|=2$ の 4 フェルミ実効ラグランジアン**の形で表すことができる．結果は以下のとおりである（導出の詳細は原論文[4]，および参考文献 [5] を参照されたい）：

$$\mathcal{L}_{eff}^{|\Delta S|=2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{4\pi \sin^2\theta_W} \sum_{i,j=c,t} (V_{is}^* V_{id})(V_{js}^* V_{jd})\, E(x_i, x_j)$$
$$\times (\bar{s}\gamma_\mu L d)(\bar{s}\gamma^\mu L d) + h.c. \tag{8.7}$$

ここで，2 つの中間状態のフェルミオンの線に現れる up-type クォークを i, j $(i, j = u, c, t)$ とすると，その寄与は 4 フェルミ演算子の前の係数部分（ウィルソン係数）に含まれる $E(x_i, x_j)$ という関数に集約されている．この関数は，up-type クォーク i の質量を m_i と書いて $x_i \equiv \frac{m_i^2}{M_W^2}$ とすると以下のように与えられる：

$$E(x_i, x_j) = -x_i x_j \left\{ \frac{1}{x_i - x_j} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \frac{1}{x_i - 1} - \frac{3}{4} \frac{1}{(x_i - 1)^2} \right) \ln x_i \right.\right.$$
$$\left.\left. -(x_i \to x_j) \right] - \frac{3}{4} \frac{1}{(x_i - 1)(x_j - 1)} \right\}. \tag{8.8}$$

(8.7) で例えば V_{is} は小林・益川 (KM) 行列の (i, s) 成分 $(V_{KM})_{is}$ を簡略化して表したものである．ところで (8.7) を見ると，i, j に関する和は実際には c, t に関してのみとっているが，これは，計算で得られる元の関数 $\hat{E}(x_i, x_j)$ から KM 行列の直交性を用いて次のようにして $E(x_i, x_j)$ に移ることができるために x_i，x_j の 1 つでも x_u となると寄与が消えてしまうからである：

$$E(x_i, x_j) = \hat{E}(x_i, x_j) - \hat{E}(x_u, x_j) - \hat{E}(x_i, x_u) + \hat{E}(x_u, x_u). \tag{8.9}$$

実際には u クォークは非常に軽いので $x_u = 0$ として構わない．$E(x_i, x_j)$ を用いる物理的理由であるが，それは FCNC は本来，クォークの質量の差によるフレーバー対称性の破れによって生じるので，例えば u クォークの寄与を基準にとれば c, t クォークと u クォークの寄与との差のみで確率振幅が書けるからである．実際，KM 行列の異なる列の間の直交性を用いると

$$\sum_{i,j=c,t} (V_{is}^* V_{id})(V_{js}^* V_{jd}) E(x_i, x_j) = \sum_{i,j=u,c,t} (V_{is}^* V_{id})(V_{js}^* V_{jd}) \hat{E}(x_i, x_j) \tag{8.10}$$

が成り立つことが容易に分かる．

ファインマン図の計算[4] は R_ξ ゲージを用いているので結果は一般に ξ 依存性を持つが，$\hat{E}(x_i, x_j) \to E(x_i, x_j)$ の置き換えの際に ξ に依存した項は消えることが分かる．これは $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ に寄与するファインマン図が箱型ダイアグラムのみであり，また物理量はゲージ不変であるべきなので当然の結果である．一方で，ξ 依存性の相殺の確認は計算のチェック，異なるダイアグラム相互の関

係の理解等に役立つものである．

$i = j$ の場合には，$E(x_i, x_j)$ において $x_i \to x_j$ の極限を（微分を用いて）計算すると

$$E(x_i) \equiv E(x_i, x_i)$$
$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{x_i}{x_i - 1}\right)^3 \ln x_i - x_i \left[\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\frac{1}{x_i - 1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x_i - 1)^2}\right] \tag{8.11}$$

が得られる．なお，この表式は勝手な中間状態のクォークの質量に関して正確であるが，外線の d, s クォークに関してはその 4 元運動量，したがって質量を無視している．これは $m_{d,s} \ll M_W$ なので非常に良い近似である．

(8.7) はクォークの場で書かれているが，実際の K 中間子は強い相互作用により d, s クォークとそれらの反粒子が束縛された状態であるので，質量行列 (8.1) の非対角成分 M_{12} を求めるためには (8.7) の 4 フェルミ演算子を K^0 と $\bar{K}^0$ の状態で挟んだ "**ハドロン行列要素 (hadronic matrix element)**" を求める必要がある．ハドロンの束縛状態は強い相互作用による（摂動論では扱えない）**非摂動的効果**により形成されるので，この行列要素はすぐに計算できない．そこで以下のように "bag parameter" と呼ばれる定数 B を用いて表す．

$$\langle K^0|(\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s)(\bar{d}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s)|\bar{K}^0\rangle = \frac{4}{3} f_K^2 m_K B. \tag{8.12}$$

ここで，f_K, m_K は K 中間子の崩壊定数，および質量である．係数はクォークのカラーに関わる因子 $(1 + \frac{1}{3}) \times 2 = \frac{8}{3}$ ($\langle K^0|\bar{d}_\alpha\gamma_\mu\gamma_5 s^\beta|0\rangle = \frac{1}{3}\delta_\alpha{}^\beta \sum_\kappa \langle K^0|\bar{d}_\kappa\gamma_\mu\gamma_5 s^\kappa|0\rangle$ を用いた．α, β, κ はカラーの添字)，および K 中間子の状態の規格化に関わる因子 $\frac{1}{2m_K}$ より得られる．また $B = 1$ は真空状態をハドロンの中間状態として挟む場合の行列要素 $\langle K^0|\bar{d}\gamma_\mu Ls|0\rangle\langle 0|\bar{d}\gamma^\mu Ls|\bar{K}^0\rangle$ に対応する．$\langle 0|\bar{d}\gamma^\mu Ls|\bar{K}^0\rangle$ 等は K 中間子がレプトンのペアに崩壊する場合のハドロン行列要素に対応するので f_K, m_K を用いて書くことができるわけである．

結局，中性 K 中間子の質量差は (8.4) より実効ラグランジアンによる K 中間子混合の行列要素を用いて次のように与えられることになる．

$$\begin{aligned}
\Delta m_K &\simeq 2\,\mathrm{Re}(M_{12}) = -2\,\mathrm{Re}\langle K^0|\mathcal{L}_{eff}^{|\Delta S|=2}|\bar{K}^0\rangle \\
&= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{6\pi\sin^2\theta_W} f_K^2 m_K B \sum_{i,j=c,t} \mathrm{Re}[(V_{is}V_{id}^*)(V_{js}V_{jd}^*)]\, E(x_i, x_j) \\
&= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{6\pi\sin^2\theta_W} f_K^2 m_K B\,\mathrm{Re}\{\lambda_c^2 E(x_c) + \lambda_t^2 E(x_t) + 2\lambda_c\lambda_t E(x_c, x_t)\} \\
&\simeq -1.7 \times 10^{-7} B\,\mathrm{Re}\{\lambda_c^2 E(x_c) + \lambda_t^2 E(x_t) + 2\lambda_c\lambda_t E(x_c, x_t)\} \quad (\mathrm{MeV}).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

ここで $\lambda_i \equiv V_{is}V_{id}^*$. また $\mathrm{Re}(M_{12})$ のように書いたのは，実際には CP 対称性の破れがあるために M_{12} は小さな虚数部分を含むからである．また，$m_K = 497(\mathrm{MeV})$，$f_K = 156(\mathrm{MeV})$ を用いた．格子 QCD による非摂動論的計算によると $B = 0.725 \pm 0.026$ と見積もられている．より数値的精度を上げた解析が必要な場合には (8.13) に摂動論的 QCD による量子補正の効果を取り入れたものが用いられる [9].

仮に t クォークの寄与を無視して，2 世代模型を想定すると，$E(x_c)$ は $x_c \ll 1$ なので

$$E(x_c) \simeq -x_c \tag{8.14}$$

と近似でき，したがって，

$$\Delta m_K \simeq \frac{\alpha G_F f_K^2 m_K}{6\sqrt{2}\pi \sin^2\theta_W} B \frac{(\sin\theta_c \cos\theta_c)^2 m_c^2}{M_W^2} \simeq 2.4 \times 10^{-12} B \quad (\mathrm{MeV}) \tag{8.15}$$

という近似式が得られる．これは正に**ガイアール・リーにより得られた結果**と一致している．(8.13) において $|\lambda_t|^2 \sim \lambda^8|\lambda_c|^2 \sim 5 \times 10^{-6}|\lambda_c|^2$ であり ($\lambda = \sin\theta_c$)，一方粗く言うと $E(x_t)/E(x_c) \sim x_t/x_c = m_t^2/m_c^2 \simeq 10^4$ であるために，t クォークの寄与は c クォークの寄与に比べ小さいことが確かめられる（しかし後述のように，CP 対称性の破れで生じる ϵ に関しては本質的に 3 世代目の存在が重要なので t クォークの寄与が重要となる）．(8.15) は実測値 (8.6) にほぼ一致し，標準模型が 6.2 節で述べた GIM 機構によりうまく FCNC の確率を説明できることを示している．別の言い方をすると，仮に当初の標準模型のように c クォークが存在せず (8.15) で GIM 機構による抑制因子 $\frac{m_c^2 - m_u^2}{M_W^2} \simeq \frac{m_c^2}{M_W^2} \simeq 3 \times 10^{-4}$ が存在しないとすると，理論の予言値は実測値より数千倍大きくなってしまう．

(b) $|\Delta S| = 1$ 過程

次に，**ストレンジネス S が 1 だけ変化する FCNC 過程**を考えてみよう．これらの代表例は $K_L \to \mu\bar{\mu}$ や $K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ であるが，ここでは $K_L \to \mu\bar{\mu}$ のみとり上げよう．

$|\Delta S| = 2$ の場合と違い，箱形ダイアグラムの他に，図 8.2 に示すような 1-loop の量子効果として生じるフレーバーを変える Z および γ 頂点を持つ Z, γ 交換ダイアグラムも寄与することになる．

図 8.2 において黒丸で示されたのは，フレーバーの変わる FCNC Z 頂点および γ 頂点である．これらは tree レベル（ラグランジアン）では存在しないので，1-loop の量子効果として得られる．それぞれの頂点には結構たくさんのファインマン図が寄与するが，ここではその計算の詳細は省き（興味のある読者は文献 [4], [5] を参照されたい）結果だけを書くと次のようである：

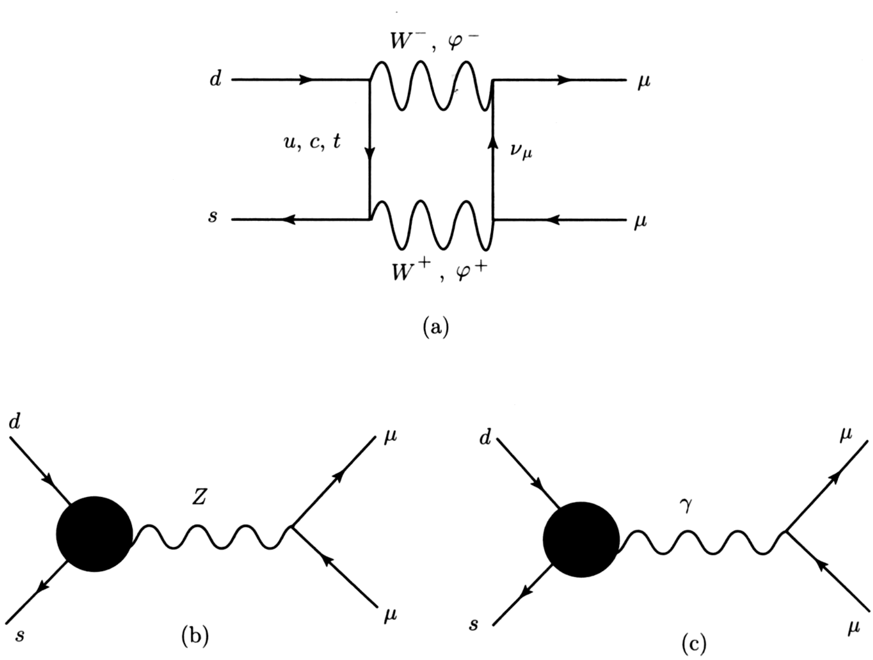


図 8.2　$K_L \to \mu\bar{\mu}$ に関与する 3 つのタイプのファインマン図.

$$\mathcal{L}_{\bar{s}dZ} = \frac{\alpha}{4\pi\sin^2\theta_W}\frac{g}{\cos\theta_W}\sum_{i=c,t}(V_{is}^* V_{id})\Gamma^Z(x_i)(\bar{s}_L\gamma_\mu d_L)\,Z^\mu, \tag{8.16}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{s}d\gamma} = \frac{\alpha}{4\pi\sin^2\theta_W}\frac{e}{2M_W^2}\sum_{i=c,t}(V_{is}^* V_{id}) \times$$
$$\bar{s}[F_1(x_i)(q^2\gamma_\mu - q_\mu \not{q})L + F_2(x_i)\sigma_{\mu\nu}\, iq^\nu(m_s L + m_d R)]d\cdot A^\mu. \tag{8.17}$$

ここで，$\bar{s}d\gamma$ 頂点は運動量空間で書かれていて，$q^\mu \equiv p_s^\mu - p_d^\mu$ は外線のクォークの 4 元運動量移行 (momentum transfer)，即ち光子の 4 元運動量である．また演算子の前のウィルソン係数に現れる関数は以下のように与えられる：

$$\Gamma^Z(x_i) = \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\frac{1}{x_i - 1}\right]x_i + \frac{3}{8}\frac{2x_i^2 - x_i}{(x_i-1)^2}\ln x_i + \gamma(x_i,\xi), \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}F_1(x_i) = Q\Bigg\{&\left[\frac{1}{12}\frac{1}{x_i-1} + \frac{13}{12}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x_i-1)^3}\right]x_i \\ &+\left[\frac{2}{3}\frac{1}{x_i-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{(x_i-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x_i-1)^4}\right]x_i\ln x_i \\ &-\frac{2}{3}\ln\left(\frac{x_i}{x_u}\right)\Bigg\} - \left[\frac{7}{3}\frac{1}{x_i-1} + \frac{13}{12}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x_i-1)^3}\right]x_i \\ &-\left[\frac{1}{6}\frac{1}{x_i-1} - \frac{35}{12}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{(x_i-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x_i-1)^4}\right]x_i\ln x_i \\ &-2\gamma(x_i,\xi),\end{aligned} \tag{8.19}$$

$$F_2(x_i) = -Q\left\{\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{x_i-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x_i-1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x_i-1)^3}\right] x_i \right.$$
$$\left. -\frac{3}{2}\frac{x_i^2}{(x_i-1)^4}\ln x_i\right\} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x_i-1} + \frac{9}{4}\frac{1}{(x_i-1)^2}\right.$$
$$\left. +\frac{3}{2}\frac{1}{(x_i-1)^3}\right] x_i - \frac{3}{2}\frac{x_i^3}{(x_i-1)^4}\ln x_i. \tag{8.20}$$

$\Gamma^Z(x_i)$, $F_1(x_i)$ はゲージパラメター ξ に依存する項 $\gamma(x_i,\xi)$ を持つ：

$$\gamma(x_i,\xi) = -\frac{x_i}{8(\xi x_i - 1)} + \frac{1}{\xi x_i - 1}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{x_i-1} + \frac{1}{8}\frac{1}{\xi x_i - 1}\right) x_i \ln x_i$$
$$+\frac{1}{8}\left[-\frac{(5\xi+1)\,x_i}{(\xi x_i - 1)(\xi - 1)} + \frac{2x_i - \xi x_i^2}{(\xi x_i - 1)^2}\right]\ln\xi. \tag{8.21}$$

しかし，こうした $\gamma(x_i,\xi)$ に比例する項は，以下の議論から分かるように実効ラグランジアンへの寄与を計算する際に，$\Gamma^Z(x_i)$ と $F_1(x_i)$ の間，$\Gamma^Z(x_i)$ と箱形ダイアグラムの間で相殺することが分かる．なお，F_2 の係数を持つ $\bar{s}\sigma_{\mu\nu}d$ というテンソル型結合の "**パウリ項**" は ξ 依存性を持たず，それ自身でゲージ不変になっている．これは次のように理解することができる．$s \to d\gamma$ 崩壊過程を考えてみると，on-shell 条件 $q^2 = 0$ と光子の偏極ベクトルが q_μ と直交することから，(8.17) において F_1 は崩壊に寄与せず，このパウリ項のみが寄与することが分かる．したがって F_2 は崩壊過程の確率振幅を表すことになり，観測量は当然ゲージ不変である必要があるので F_2 の項が単独でゲージ不変であるという結果は当然であると言える．

ここで一つ注意を要するのは，$F_1(x_i)$ に存在する $\ln(\frac{x_i}{x_u})$ の項の存在である．この項があるために $F_1(x_i)$ は $x_u \to 0$，したがって $m_u \to 0$ の極限で発散し**赤外特異性**を持つ．こうした理由で，ここだけは x_u 依存性を残している．この対数の項は $\frac{m_c^2 - m_u^2}{M_W^2}$ に比べて大きな寄与となるが，グルーオンに関する FCNC 頂点 $\bar{s}dg$ (g : gluon) においても同様な寄与が現れる．この頂点を用いているのが図 9.1 に示した "**ペンギン・ダイアグラム (penguine diagram)**" である．

なお，$F_{1,2}(x_i)$ において Q は中間状態のクォークの電荷であり，実際には $Q = \frac{2}{3}$ とおけるのであるが，Q をパラメターとして残すことで，光子が外線と内線のクォークどちらかに結合している場合のファインマン図の寄与と，ループ中の $W^\pm$, $\varphi^\pm$ に結合している場合の寄与を区別することができる．これにより $\bar{s}dg$ 頂点も容易に求めることができる．次の例題を参照されたい．

例題 8.1　$\mathcal{L}_{\bar{s}d\gamma}$ の結果を用いて，**グルーオンに関する FCNC 頂点** $\boldsymbol{\mathcal{L}_{\bar{s}dg}}$ を求めなさい．

解　$\mathcal{L}_{\bar{s}d\gamma}$ におけるウィルソン係数 $F_{1,2}$ のそれぞれにおいて，光子が up-type クォークに結合するときの寄与を aQ，down-type クォークに結合するときの寄与を $b(Q-1)$, $W^\pm$, $\varphi^\pm$ に結合するときの寄与を c と書くとすると，これら

の和は $(a+b)Q-b+c$ となる．一方，光子をグルーオンに換えた場合には $W^\pm$, $\varphi^\pm$ との結合は存在せず，またクォークとの結合はカラーにのみ関係しフレーバーに依らないのでウィルソン係数は $a+b$ に比例することになる．よって，$F_{1,2}$ において Q に比例する項のみを残し $eQ \to g_s \frac{\lambda^a}{2}$（$\lambda^a$：ゲルマン行列，$g_s$：QCD のゲージ結合定数）という置き換えをすれば，グルーオンに関する FCNC 頂点関数が得られることになる．即ち

$$\mathcal{L}_{\bar{s}dg} = \frac{\alpha}{4\pi \sin^2\theta_W} \frac{g_s}{2M_W^2} \sum_{i=c,t} \sum_{\alpha,\beta=1,2,3} (V_{is}^* V_{id})(g^\mu)_\alpha{}^\beta$$
$$\times\ \bar{s}_\alpha [F_1^{(g)}(x_i)(q^2\gamma_\mu - q_\mu \not{q})L + F_2^{(g)}(x_i)\sigma_{\mu\nu}\, iq^\nu(m_s L + m_d R)]d_\beta \tag{8.22}$$

と書くと（ここで，$g_\mu \equiv \frac{\lambda^a}{2} g_\mu^a$．また $\alpha, \beta = 1,2,3$ はカラーの添字），$F_1^{(g)}(x_i)$，$F_2^{(g)}(x_i)$ は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} F_1^{(g)}(x_i) \ =\ & \left[\frac{1}{12}\frac{1}{x_i-1} + \frac{13}{12}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x_i-1)^3}\right] x_i \\ & + \left[\frac{2}{3}\frac{1}{x_i-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{(x_i-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x_i-1)^4}\right] x_i \ln x_i \\ & - \frac{2}{3}\ln\left(\frac{x_i}{x_u}\right), \end{aligned} \tag{8.23}$$

$$\begin{aligned} F_2^{(g)}(x_i) \ =\ & \left[\frac{1}{4}\frac{1}{x_i-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{(x_i-1)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x_i-1)^3}\right] x_i \\ & + \frac{3}{2}\frac{x_i^2}{(x_i-1)^4} \ln x_i. \end{aligned} \tag{8.24}$$

□

$\mathcal{L}_{\bar{s}d\gamma}$ (8.17) において F_1 と F_2 を係数として持つ演算子のカレント部分，$\bar{s}(q^2\gamma_\mu - q_\mu \not{q})d$ および $(\bar{s}\sigma_{\mu\nu}d)q^\nu$ に q^μ を掛けて μ について縮約すると，クォーク場の運動方程式を用いることなく自動的に消え，電磁カレントの保存則を満たすことが分かる．これは FCNC の場合には d と s クォークの質量が違うために運動方程式を用いてカレントの保存を保証することができないからである．こうして，$\mathcal{L}_{\bar{s}d\gamma}$ は必然的に q^μ の 2 次のオーダーになり，外線のクォークの 4 元運動量をゼロとする極限では消えてしまう．よって，この頂点関数の計算においては，箱形ダイアグラムや $\bar{s}dZ$ 頂点の場合とは違って外線の運動量を無視して計算することはできない．こうした違いが後の **non-decoupling** 効果の議論の際に重要になる．

$K_L \to \mu\bar{\mu}$ 崩壊に関与する 4 フェルミ実効ラグランジアンを次のように書こう：

$$\mathcal{L}_{eff}^{|\Delta S|=1} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{4\pi \sin^2\theta_W} \sum_{i=c,t} (V_{is}^* V_{id}) C(x_i)(\bar{s}_L \gamma_\mu d_L)(\bar{\mu}_L \gamma^\mu \mu_L)$$
$$+\, h.c. \tag{8.25}$$

ここでウィルソン係数 $C(x_i)$ は図 8.2 の箱形ダイアグラム (a) と Z 交換のダイアグラム (b) からの寄与の和で与えられる：

$$C(x_i) = C_{\Box}(x_i) + C_Z(x_i). \tag{8.26}$$

Z 交換のダイアグラムからの寄与は $\bar{s}dZ$ 頂点の結果を用いて $C_Z(x_i) = \Gamma^Z(x_i)$ で与えられる．また箱形ダイアグラムの寄与は $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合のときと同様の計算により

$$C_{\Box}(x_i) = \frac{3}{8}\frac{x_i}{(x_i-1)^2}\ln x_i - \frac{3}{8}\frac{x_i}{x_i-1} - \gamma(x_i, \xi) \tag{8.27}$$

と求められる．これら 2 つの寄与を足すとゲージ・パラメター ξ に依存する $\gamma(x, \xi)$ の項は相殺し，次のようなゲージ不変な最終結果が得られる．

$$C(x_i) = \frac{3}{4}\left(\frac{x_i}{x_i-1}\right)^2 \ln x_i + \frac{1}{4}x_i - \frac{3}{4}\frac{x_i}{x_i-1}. \tag{8.28}$$

ここで注意を要するのは，(8.25) において左巻きのミューオンのみが関与しているということである．Z のミューオンとの相互作用項点には，左巻きのミューオンとの相互作用項の他に $\sin^2\theta_W$ に比例したベクトル型カレントの部分も存在し，また図 8.2 の光子を交換するダイアグラム (c) ではミューオンとの結合は純粋にベクトル型である．しかし，こうしたベクトル型のカレントは $K_L \to \mu\bar{\mu}$ 崩壊には寄与しないことが分かる．その理由は，崩壊に関与するハドロンの遷移振幅（行列要素）$\langle 0|\bar{s}_L\gamma_\mu d_L|K_L\rangle = -\frac{1}{2}\langle 0|\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 d|K_L\rangle$ に現れる q_μ（ゲージボソンの 4 元運動量）がミューオンのベクトル型カレントと縮約されると，ミューオンの運動方程式を用いて $q_\mu(\bar{\mu}\gamma^\mu\mu) = 0$ となるからである．これは電磁カレントの保存則に他ならない．こうして，せっかく計算した $\bar{s}d\gamma$ 頂点は，考えている K 中間子の崩壊には寄与しないことになるが（$K^+ \to \pi^+e^+e^-$ といった崩壊には寄与するが），求められた $\bar{s}d\gamma$ 頂点は，例えば $b \to s\gamma$ 崩壊（ハドロンレベルでは $B \to K^*\gamma$ といった崩壊）の崩壊確率の計算に，KM 行列の要素を $(V_{is}^*V_{id}) \;\to\; (V_{ib}^*V_{id})$ のように変えるだけでそのまま使うことができる．このため，この FCNC 頂点は KEK 等での **B 工場 (B-factory) 実験**での標準模型の検証などで有効に用いられている．

$K_L \to \mu\bar{\mu}$ 崩壊の分岐比 (**branching ratio**) は，基準となる崩壊への分岐比との比をとることで (8.28) のウィルソン係数を用いて

$$\begin{aligned}\frac{Br(K_L \to \mu\bar{\mu})_{sd}}{Br(K^+ \to \bar{\mu}\nu_\mu)} &\simeq \frac{\tau(K_L)}{\tau(K^+)}\, 2\left(\frac{\alpha}{4\pi\sin^2\theta_W}\right)^2 \frac{\{\mathrm{Re}[\sum_{i=c,t} V_{is}^*V_{id}C(x_i)]\}^2}{V_{us}^2} \\ &\simeq 5.2\times 10^{-5}\frac{\{\mathrm{Re}[\sum_{i=c,t} V_{is}^*V_{id}C(x_i)]\}^2}{V_{us}^2}\end{aligned} \tag{8.29}$$

と与えられる．ここで左辺の添字の "sd" というのは "short distance" の略である．c, t といった比較的重い（正確には QCD 特有のエネルギースケール Λ_{QCD} よ

り大きな質量を持つ）クォークの寄与は，エネルギー・運動量のスケールが大きい領域，したがって“短距離 (short distance)”の領域からの寄与なので，上記のような摂動論的なループ計算が正当化できる．また，K_L 崩壊と K^+ 崩壊における終状態の位相空間の体積の差については無視している．この崩壊は $|\Delta S| = 1$ の崩壊なので $|\lambda_t| \sim \lambda^4 |\lambda_c| \sim 2 \times 10^{-3} |\lambda_c|$, $C(x_t)/C(x_c) \sim x_t/x_c = m_t^2/m_c^2 \simeq 10^4$ より t クォークの寄与が重要となる．しかし，こうした**短距離効果**に加えて，中間状態に 2 つの光子が現れる“**2 光子過程**”と呼ばれる**長距離効果** (long distance effect) も考慮する必要があり，こちらのほうがむしろ大きな寄与をする．長距離と言われるのは，中間状態の 2 つの光子が on-shell 状態にもなり得ることからも分かるように低い運動量の領域の寄与が重要だからである．2 光子過程の寄与は実測されている $K_L \to 2\gamma$ のデータを用いて見積もることができて，(8.29) にこの効果も合わせると，実験データ

$$Br(K_L \to \mu\bar{\mu}) = (6.84 \pm 0.11) \times 10^{-9} \tag{8.30}$$

をほぼ再現することができる．これに対して，もう 1 つの K 中間子の代表的な FCNC 過程である $K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}$ では，光子の関与する過程は寄与しないので（ニュートリノは電気的に中性）長距離効果による不定性は無視できて信頼性の高い予言が可能である．詳しい議論は避けるが（興味のある読者は文献 [5] を参照されたい），$K_L \to \mu\bar{\mu}$ のときと同様な計算から求めたウィルソン係数 [4] に t クォーク等のクォーク質量と，3 つの世代間混合角を代入して見積もると，アメリカのブルックヘブン国立研究所 (BNL) の実験で得られたデータ $Br(K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}) = (1.7 \pm 1.1) \times 10^{-10}$ と良い精度で一致することが分かる．

8.2 重いフェルミオンの non-decoupling 効果

ガイアール・リーによるチャームクォーク質量の予言に典型的に見られるように，FCNC 過程の解析は未発見粒子の探索に大いに役立つ．こうした未発見粒子は，その時点で到達可能なエネルギーより大きな質量を持っているために直接生成できないのであるから，その意味で“重い粒子”ということができる．FCNC の場合にそうであるように，直接生成できないとしてもエネルギーの不確定性によってループ・ダイアグラムの**仮想状態（中間状態）**には現れるのである．しかし，粒子が重いほどその直接生成は難しくなるので，こうした量子効果についても粒子が重くなるにつれて小さくなると直感的には予想される．このように重い粒子の効果がその質量よりずっと小さな“低エネルギー”過程において抑制されることを，重い粒子の低エネルギー過程からの“**decoupling**”と言う．実際，質量 M を持つ重いスカラー粒子を考えると，その伝播子は

$$\frac{i}{k^2 - M^2} \simeq -\frac{i}{M^2} \tag{8.31}$$

のように $k^2 \ll M^2$ を満たす低エネルギー過程では，その質量の逆ベキで抑制される．よって，少なくとも重い粒子の tree ダイアグラムでの寄与に関しては decoupling が起きそうである．ループ・ダイアグラムにおいてはループ中の 4 元運動量 k^μ の大きさは M よりずっと大きくなることも可能なので (8.31) は一般には成立せず decoupling は自明でない．しかしながら，QED や QCD のような自発的対称性の破れの無い理論においては，アペルクィスト・カラゾーン (Appelquist–Carazzone) により **"decoupling 定理 (decoupling theorem)"** が証明されていて [6]，重い粒子は繰り込み定数には寄与するものの，繰り込みを行った後の物理的観測量に関しては decouple することが示されている．

このように考えると，チャームクォークよりずっと重いトップクォークの効果は強く抑制され，その寄与は重要でないように一見思える．もしそうだとすると FCNC 過程の解析からトップクォークに関する情報を得ることは難しくなるであろう．また，CP 対称性の破れに関しては小林・益川理論では 3 世代目の存在が本質的に重要であるので，大きな CP 対称性を破る効果は期待できないことになるであろう．しかしながら，実際にはトップクォークは色々な FCNC 過程，特に 3 世代目の b クォークからなる B 中間子系においては支配的な寄与を与え，また CP 対称性の破れで生じる物理量に関しては K 中間子の場合を含め常に支配的，あるいは重要な寄与を与えることが知られている．実際，例えば (8.11), (8.28) のウィルソン係数は，トップクォークの寄与に関しては $x_t = \frac{m_t^2}{M_W^2}$ が大きいとして

$$E(x_t) \simeq -\frac{x_t}{4} = -\frac{1}{4}\frac{m_t^2}{M_W^2}, \tag{8.32}$$

$$C(x_t) \simeq \frac{x_t}{4} = \frac{1}{4}\frac{m_t^2}{M_W^2} \tag{8.33}$$

のように振る舞い，その寄与は m_t^2 に比例して大きくなるので決して decouple しない．このような decouple しない効果を **"non-decoupling" 効果**と言う．以下で，decouple する場合と non-decoupling の場合のそれぞれについて，それらの間の本質的違いに注目しながら少し議論してみよう．

8.2.1 decouple する場合

既に述べたように QED や QCD のような自発的対称性の破れの無いゲージ理論では decoupling 定理が成立する [6]．ここでは QED の場合を例にとろう．

仮想的に，電子と同じ電荷を持つが非常に重い荷電レプトン E^- が存在するとしよう．その質量を M とする．decoupling が自明でないループ・ダイアグラムの例として，外線に n 個の光子 γ があり，E^- が内線を回る 1 ループ・ダイアグラムを考えてみよう．例えば $n=4$ の場合のファインマン・ダイアグラムは図 8.3 である．

このループ計算の結果は，外線の光子の場 A_μ に関する実効ラグランジアン

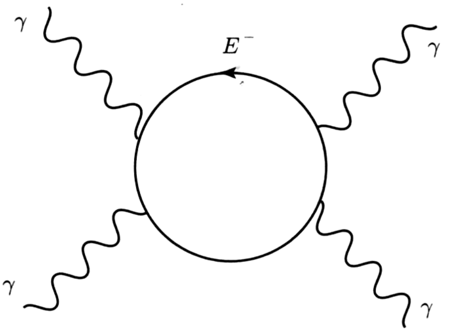


図 8.3 光子の 4 点グリーン関数への重いフェルミオン E^- の量子効果.

の形で

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_i c_i(M)\, O_i \tag{8.34}$$

のように記述できる．ここで O_i は n 個の光子場 A_μ に関するゲージ不変な局所演算子であり，c_i は E^- による量子補正を表すウィルソン係数で M および QED の微細構造定数 α の関数である．演算子 O_i の質量次元 d_i は，ゲージ不変性を考慮すると n より一般に大きいことが分かる：$d_i > n$．よって，次元解析より明らかなように，$n \geq 4$ の場合には c_i は M の逆ベキで $1/M^{d_i-4}$ のように抑制され，E^- は decouple することになる．こうした質量次元が 4 より大きい，したがって理論のラグランジアンには存在しない演算子は "**irrelevant operator**" と呼ばれる．"irrelevant operator" の効果は M の逆ベキで抑制されて "irrelevant" であると言える．

では $d_i = 4$ の "**marginal operator**" の場合にはどうであろうか．marginal operator は $n = 2$ の場合に $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ として現れる．要するに，この演算子は光子の "自己エネルギー" (self-energy) ダイアグラムから生じる．$d_i = 4$ なので，この演算子の係数は無次元量であり

$$\int_0^1 dt \ln\left[\frac{\Lambda^2}{M^2 - t(1-t)q^2}\right] \tag{8.35}$$

のように振る舞う．ここで Λ は積分すべきループ運動量の大きさの上限，即ち "**運動量カットオフ (momentum cutoff)**" であり t は "**ファインマン・パラメター**" である．また q^μ は光子の 4 元運動量である．明らかにこの場合，係数は M の逆ベキで抑制されることはなく，一見 decoupling が崩れているようである．しかしながら，係数が $\ln \Lambda$ のように**紫外発散（対数発散）**するということは $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の演算子は繰り込まれる必要がある．$-q^2 = \mu^2$（μ：繰り込み点）で量子補正が消えるべし，という繰り込み条件を課すと，相殺項による紫外発散の相殺の後に残る有限な量子補正は

$$\int_0^1 dt \ln\left[\frac{\Lambda^2}{M^2 - t(1-t)q^2}\right] - (-q^2 \to \mu^2) \tag{8.36}$$

になる．低エネルギー，即ち μ^2, $|q^2| \ll M^2$ では，この積分は

$$\int_0^1 dt\, t(1-t)\,\frac{q^2+\mu^2}{M^2} = \frac{1}{6}\frac{q^2+\mu^2}{M^2} \ll 1 \tag{8.37}$$

のように近似される．こうして重いフェルミオンの効果は繰り込みの後には M の逆ベキで抑制されることが分かる．これが decoupling 定理の内容である．なお，(8.37) は (8.35) を q^2 でテーラー展開したときの q^2 のオーダーの項を見ていることになり，したがって演算子で言えば質量次元 $d_i = 4$ の $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ではなく，$d_i = 6$ の $(\partial_\lambda F_{\mu\nu})(\partial^\lambda F^{\mu\nu})$ のような irrelevant operator を考えていることになり，このために decouple するのである．

8.2.2 non-decoupling の場合

重い粒子が decouple してしまうと，これらの重い粒子の特性に関する情報が得られ難いということになる．幸い，重い粒子の効果が低エネルギーでも顕著に現れる **non-decoupling 効果**の場合があることが知られている．既に述べた FCNC 過程における m_t^2 に比例した（m_t の逆ベキで抑制されない）寄与は重要な例である．また，ペスキン・竹内 (Peskin–Takeuchi) により導入された**電弱相互作用の精密検証**に用いられる **S, T, U パラメター**[7] のうちで，T パラメターへのトップクォークとボトムクォークの $SU(2)_L$ 2 重項の寄与

$$\frac{3}{16\pi \sin^2\theta_W}\,\frac{1}{M_W^2}\left(m_t^2 + m_b^2 - \frac{2m_t^2 m_b^2}{m_t^2 - m_b^2}\ln\frac{m_t^2}{m_b^2}\right) \tag{8.38}$$

においても，$\frac{3}{16\pi \sin^2\theta_W}\frac{m_t^2}{M_W^2}$ $(m_t^2 \gg m_b^2)$ と振る舞う m_t^2 に比例した non-decoupling 効果が存在することが知られている．

こうした non-decoupling 効果は，**自発的対称性の破れを持つ理論**で，考えている重い粒子の質量がヒッグスの真空期待値によって与えられるような場合に生じ得る，と考えることができる．上述の標準模型におけるトップクォークの寄与は正にこの例になっている．では，上で述べた自発的対称性の破れが無い場合の decoupling 定理のどこが変更を受けるのであろうか．それは，自発的対称性の破れのある理論では QED の場合とは違い**質量に比例した結合定数**が存在するという事実である．実際，こうした理論では（すべての）質量はヒッグスの真空期待値により供給されるので，重いということはヒッグスとの結合定数が大きいことを意味する．結合定数は相互作用頂点に現れるのでファインマン図の計算の際に分子に現れ，decoupling 定理から導かれる大きな質量の逆ベキを相殺し，あるいは場合によってはこれを凌駕する大きな質量の正ベキに比例する non-decoupling 効果を生じることが可能になるのである．実際，トップクォークの湯川結合定数は

$$f_t = m_t/(v/\sqrt{2}) = \frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_t}{M_W} \tag{8.39}$$

のように m_t に比例する.

具体的に，どのようにして FCNC 過程において m_t^2 に比例した non-decoupling 効果が現れるかを見てみよう．例として $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合に寄与する箱形ダイアグラム図 8.1 を考えてみよう．例えば $\xi = 1$ のゲージを採用すると $W^\pm$ と $\varphi^\pm$ は同じ形の伝播子を持ち同等に扱われる．湯川結合が non-decoupling 効果において重要な働きをするようなので，2 つの $\varphi^\pm$ を交換するダイアグラムに注目しよう．この場合，両方のフェルミオンの線にトップクォークが走る場合を考えると，4 つの相互作用頂点はいずれも (8.39) の形の湯川結合の部分を含む（正確にはトップクォークが右巻きの状態になる場合にのみこの項が現れるが）．したがって 4 つの頂点部分から f_t^4 の因子が出る．一方，4 つの伝播子の掛け算を運動量積分すると m_t が M_W より十分大きいと考えると 4 フェルミ演算子のウィルソン係数には次元解析から $\frac{1}{m_t^2}$ の因子が現れる．こうして全体としてウィルソン係数は（小林・益川行列の要素の部分を除いて）

$$f_t^4 \frac{1}{m_t^2} \sim \frac{g^4}{4}\frac{m_t^2}{M_W^4} \tag{8.40}$$

のように振る舞うことが期待される．実際これは (8.7), (8.32) の結果をよく説明するものである．

non-decoupling 効果を演算子を用いた解析で考えてみよう．自発的対称性の破れを持つ理論でも理論そのものにはゲージ対称性があるので，どのような量子補正もヒッグス場を含めれば必ず**ゲージ不変な演算子**で書かれるはずである．その後にヒッグス場を真空期待値で置き換えると自発的対称性の破れの効果を取り入れることができる．QED における E^- による decoupling 効果に関しては，質量次元が 4 より大きい "irrelevant operator" の係数が E^- の質量の逆ベキで抑制され decoupling が生じることを見たが，自発的対称性の破れのある理論でも，ある重い粒子が存在し，その質量 M の起源が自発的対称性の破れではなくゲージ不変な質量項である場合には，この重い粒子により生じる "irrelevant operator" の係数は QED の場合と同様にゲージ不変量 M の逆ベキで抑制され decoupling 効果が起きる．例えば標準模型に右巻きニュートリノを導入し，これに大きなゲージ不変なマヨラナ質量項 M_R を持たせると，左巻きニュートリノから作られるマヨラナ・ニュートリノ $\nu_L + (\nu_L)^c$ は M_R の逆ベキで抑制されるマヨラナ質量を得るが（**"シーソー" 機構**[8]），これも**右巻きニュートリノの decoupling 効果**のために，これとディラック質量項を組む左巻きニュートリノの質量が小さくなった結果と考えることができる．実際，左巻きニュートリノのマヨラナ質量項は，

$$(L^t H)C(H^t L) \tag{8.41}$$

のような質量次元 5 の演算子で記述できて，その係数は M_R の逆数で抑制される．ここで，L, H はレプトンとヒッグスの 2 重項であり C は荷電共役の行

列である．これに対して，トップクォークの non-decoupling 効果に関しては状況は大きく異なる．本質的なのはトップクォーク質量の起源は自発的対称性の破れである，ということである．したがってその量子効果を表す irrelevant operator の係数は，ヒッグスの真空期待値（弱スケール）の逆数に比例するだけである．

ところで，同じ FCNC 過程なのに箱形ダイアグラムや FCNC Z 頂点においては (8.32) や (8.18) から分かるように $\boldsymbol{x_t = m_t^2/M_W^2}$ **に比例した大きな non-decoupling 効果**が存在するのに対して，FCNC 光子頂点を見てみると，(8.19), (8.20) より分かるように，$F_1(x_t)$, $F_2(x_t)$ は定数か，せいぜい $\log x_t$ のように振る舞い，m_t^2 に比例する項は現れない．これは，光子の頂点関数の場合には Z の頂点関数の場合と違って，自発的対称性の破れの後でも残っている QED のゲージ対称性の帰結としてカレントの保存則があるために，例えば F_1 の場合には $q^2\gamma_\mu - q_\mu \not{q}$ の因子に比例し，その分だけウィルソン係数の残りの部分の質量次元が Z 頂点の場合に比べて 2 だけ小さくなって -2 になるためである．具体的には，トップクォークの交換から f_t^2 が得られるが，次元解析からこれに $\frac{1}{m_t^2}$ が掛け算され $f_t^2 \times \frac{1}{m_t^2} \sim \frac{g^2}{2M_W^2}$ のようになるのである．直観的に言えば，FCNC 光子頂点に関しては decoupling 定理が成立する QED の場合に近づく，ということである．

第 9 章

小林・益川模型の予言とCP対称性の破れの検証

既に7章において，小林・益川模型においてどのような機構でCP対称性が破れるか，またCP対称性を破るための必要十分条件は何であるかについて議論した．ここでは，具体的にCP対称性を破る物理量に関して小林・益川模型がどのような予言をするのか，特に，どのような物理量に関して特徴的な予言を行うか議論する．小林・益川理論は3世代の存在を予言したのみならず，CP対称性の破れの機構を提唱している理論であるので，その検証を考えるという趣旨である．

7章で説明したように，小林・益川理論においてCP対称性が破れるためには，CP対称性を破る"**CP位相**" δ の存在はもちろん必要であるが，同時に**フレーバー（世代間）混合**，およびそれにより引き起こされる**フレーバーを変える中性カレント (FCNC) 過程**の存在が必要欠くべからざるものである．前章で見たように，FCNC過程には色々な過程があるが，CP対称性の破れという観点で考えると，中性中間子の混合過程がとくに重要であることが分かる．具体的には，s クォークの束縛状態である中性 $\boldsymbol{K}$ **中間子** K^0, b クォークと d あるいは s クォークとの束縛状態である $\boldsymbol{B}$ **中間子** $B_d (B_d \sim d\bar{b}), B_s (B_s \sim s\bar{b})$, といった電気的に中性の**擬スカラー (pseudo-scalar) 粒子とそれぞれの反粒子との間の混合**

$$K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0, \qquad B_d \leftrightarrow \bar{B}_d, \qquad B_s \leftrightarrow \bar{B}_s \tag{9.1}$$

である．これらは $|\Delta S| = 2$, あるいは $|\Delta B| = 2$ のFCNC過程で，したがって図8.1や，これを $s \to b, d \to s$ のように変えて得られる箱形ダイアグラムのみが寄与する過程であるが，この箱形ダイアグラムにおいて頂点に付与される小林・益川行列要素に存在するCP位相の効果によってCP対称性の破れが生じる．歴史的にも，また最近のKEK等での**"B工場 (B-factory)" 実験**においても，こうした混合におけるCP対称性を破る物理量が非常に重要な役割を果たしてきている．

なお，こうした混合は例えば中性 K 中間子の質量差 Δm_K がそれから生じることからも分かるように，(8.1) のような中性中間子の質量行列の非対角成分に寄与する．よって，混合における CP 対称性の破れは質量行列における CP 対称性の破れを意味し，具体的には中性中間子の質量固有状態（質量の確定した物理的状態）が CP 不変な状態ではなくなることを意味する．

この章では，まず歴史的に重要であった，**中性 K 中間子系における CP 対称性の破れ**に関する**小林・益川理論の予言**を議論し，その次に最近つくば市の高エネルギー加速器研究機構 (KEK) や，アメリカのスタンフォード線形加速器センター (SLAC) において行われた **BELL**, **BaBar** と名づけられた実験で検証され，小林・益川理論の正しさを強く支持した**中性 B 中間子系における大きな CP 非対称性**に関して議論しよう．

9.1 中性中間子系の質量行列

個々の中性中間子系の話に入る前に，ここではまず，一般の擬スカラー粒子（P と書く）とその反粒子 ($\bar{P}$) の系における質量行列を論じよう．

中性 K 中間子系における質量行列（静止系でのハミルトニアン）は，(8.1) で一度議論しているが，ここでは CP 対称性の破れの効果もとり入れ，更に，中性中間子が例えば $\pi\pi$ といったチャンネルに崩壊し不安定な粒子であることも考慮して次のような一般的な形を考察する：

$$H = \mathcal{D} - \frac{i}{2}\mathcal{A}. \tag{9.2}$$

ここで，$\mathcal{D}, \mathcal{A}$ のそれぞれはエルミート行列であり

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} M & M_{12} \\ M_{12}^* & M \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \Gamma \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

と書かれる．この行列の基底は $|P^0\rangle$ と $|\bar{P}^0\rangle$ である．ここでエルミート行列の部分 $\mathcal{D}$ は**質量行列**である．一方 $-(i/2)\mathcal{A}$ の "**反エルミート**" の部分は中間子が崩壊することを実質的に表すための項である．実際，簡単のために $M_{12} = \Gamma_{12} = 0$ として P^0 の状態の波動関数の時間発展を見ると $e^{-i(M-\frac{i}{2}\Gamma)t} = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{-iMt}$ となり，絶対値 2 乗をとると $e^{-\Gamma t}$ のように存在確率が時間と共に減少し，$\tau = \frac{1}{\Gamma}$ の寿命で崩壊することを表している．こうした崩壊を表す $-\frac{i}{2}\mathcal{A}$ の項は確率が減少することを示すために "**吸収項 (absorptive part)**" と呼ばれる．したがって，$-(i/2)\mathcal{A}$ についている $-i$ は吸収項を表すもので，小林・益川模型での CP 非保存を示す CP 位相とは区別すべきものである．M_{12}, Γ_{12} は箱形ダイアグラムの寄与として求められ，小林・益川行列の CP 位相のために一般に

複素数である．また，行列 $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$ の対角成分 M, Γ は P^0, $\bar{P}^0$ について同じであるが，これは (3.61), (3.62) に示すように **CPT 定理**の帰結として，粒子と反粒子の質量と寿命が正確に等しいからである．

このハミルトニアン H は吸収項のためにエルミートではなく，したがってユニタリー変換で対角化することはできないが，固有値方程式を解いてその固有ベクトルと固有値を求めることができる．まず，ハミルトニアンの **2 つの固有状態**は

$$|P_1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{|p|^2+|q|^2}}\,(p|P^0\rangle - q|\bar{P}^0\rangle),$$
$$|P_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{|p|^2+|q|^2}}\,(p|P^0\rangle + q|\bar{P}^0\rangle), \tag{9.5}$$

と書かれ，線形結合の係数の比は

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}}{\sqrt{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}} \tag{9.6}$$

で与えられる．$P_{1,2}$ のそれぞれの質量 $m_{1,2}$ と寿命 $\Gamma_{1,2}$ を表すハミルトニアンの**固有値**は

$$\lambda_{1,2} = m_{1,2} - \frac{i}{2}\,\Gamma_{1,2}, \tag{9.7}$$

$$\varDelta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \varDelta m - \frac{i}{2}\,\varDelta\Gamma, \tag{9.8}$$

$$\varDelta m \equiv m_2 - m_1, \qquad \varDelta\Gamma \equiv \Gamma_2 - \Gamma_1. \tag{9.9}$$

ここで $\varDelta\lambda$ は

$$\varDelta\lambda = \varDelta m - \frac{i}{2}\,\varDelta\Gamma = 2\sqrt{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}\sqrt{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*} \tag{9.10}$$

のように与えられる．

9.2 中性 K 中間子系における CP 対称性の破れ

2.4 節で説明したように，歴史的には最初に **CP 対称性の破れ**が確認されたのは，**中性 K 中間子の崩壊 $K_L \to \pi\pi$** においてであった．K 中間子系においては，(9.5) で定義される 2 つの質量固有状態 $P_{1,2}$ は，それぞれ $K_{S,L}$ と呼ばれる．そもそも S, L という添字の意味は，2 つの固有状態の寿命 $\tau_{S,L}$ が大きく異なる（$\tau_S \ll \tau_L$）ために，寿命の長短を S, L で表しているのである．この寿命の違いは次のように理解できる．K のシステムでの小さな CP 対称性の破れを無視したとすると，$K_{S,L}$ は CP の固有状態 $|K_{1,2}\rangle = \frac{|K^0\rangle \mp |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}}$ に正確に一致する．CP 対称性が破れていないとすると，$|K_1\rangle$ は CP 固有値が $+1$ の 2 個の π 中間子の状態に崩壊できるのに対し，CP 固有値が -1 の $|K_2\rangle$ のほうは 2 個の π 中間子には崩壊できず，3 個の π 中間子といった，“位相空間” の体積が限定されたモードへの崩壊のみが許されることになる．したがって K_2 の

寿命が K_1 に比べてずっと長くなるのである．よって，例えば加速器実験において K_S, K_L の混合した状態である K^0 がフレーバーを保存する強い相互作用によって生成されたとしても，しばらく時間が経つと寿命の長い K_L のみが残ることになる．こうして，CP 対称性があると決して起きない $K_L \to \pi\pi$ 崩壊を観測することで CP 対称性の破れを明確に示すことができたのである．そこで，この節では K 中間子のシステムにおける CP 対称性の破れに的を絞って議論しよう．特に，この $K_L \to \pi\pi$ 崩壊が小林・益川模型においてどのように説明されるかについて考えてみることにする．

7.3 節で議論したように，中性 K 中間子の場合に対応する (d, s) のペアに関するユニタリー三角形は $\mathcal{O}(\lambda)$ の長い 2 つの辺（$|V_{us}V_{ud}^*| \simeq |V_{cs}V_{cd}^*|$）と $\mathcal{O}(\lambda^5)$ の非常に短い辺 ($|V_{ts}V_{td}^*|$) でできた，ほぼ閉じた三角形であり，したがって一番小さな内角は $\mathcal{O}(\lambda^4)$ で小さい．**CP 非対称性 (CP asymmetry)** は内角の大きさに関係するので，このことは中性 K 中間子系における CP 非対称性が小さいことを意味している．実際 $K_L \to \pi\pi$ の確率振幅は CP 対称性の破れを伴わない "普通の" 崩壊である $K_S \to \pi\pi$ の確率振幅の 10^{-3} 倍程度であることが分かっているが，これは $\mathcal{O}(\lambda^4)$ である．

以下で，この CP 非対称性を CP 位相 δ およびトップクォーク質量や世代間混合を用いて表す関係式を導いてみよう．ここでもう一度何故 CP 対称性があると $K_L \to \pi\pi$ 崩壊は起きないかを復習すると，CP 対称性があると $K_L = K_2$ であり，一方で CP 対称性があると CP 固有値を保存しないような $K_2 \to \pi\pi$ 崩壊は起こり得ないからである．この論理の対偶をとると，$K_L \to \pi\pi$ 崩壊が起きたとすると，$K_L \neq K_2$ あるいは $K_2 \to \pi\pi$ の少なくとも一方が実現していることになる．即ち，この崩壊には，以下に述べる 2 つの独立な CP 対称性を破る機構が関与している．

9.2.1 間接的 CP の破れ

これは，箱型ダイアグラムによる $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ 混合における CP 対称性の破れで生じる中性 K 中間子系の質量行列における CP 対称性の破れにより，質量固有状態が CP の固有状態でなくなる，即ち $K_L \neq K_2$ となることを指す．この CP 対称性の破れは K 中間子の崩壊の確率振幅そのものにおける CP 対称性の破れ（これを **"直接的 CP の破れ"(direct CP violation)** と言う）ではないので，**"間接的 CP の破れ"(indirect CP violation)** と言われる．具体的には M_{12} および Γ_{12} の虚数部分がこうした CP 対称性の破れを生じる．上述のように K のシステムにおける CP 対称性の破れは小さい ($\mathcal{O}(10^{-3})$) と期待されるので，これらの虚数部分は実数部分に比べてずっと小さい（$\mathrm{Im}\, M_{12} \ll \mathrm{Re}\, M_{12}$, 等）と考えられる．よって (9.6) より q/p の 1 からのずれは小さいと期待される．そこで，そのずれを小さなパラメター $\bar{\epsilon}$ を用いて $q_K/p_K = (1-\bar{\epsilon})/(1+\bar{\epsilon})$ と書くと (p_K, q_K は K 中間子の場合の p, q)，(9.5) の 2 つの質量固有状態を次

のように書くことができる：

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\bar{\epsilon}|^2)}}[(1+\bar{\epsilon})|K^0\rangle + (1-\bar{\epsilon})|\bar{K}^0\rangle]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}}[|K_2\rangle + \bar{\epsilon}|K_1\rangle], \tag{9.11}$$
$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\bar{\epsilon}|^2)}}[(1+\bar{\epsilon})|K^0\rangle - (1-\bar{\epsilon})|\bar{K}^0\rangle]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+|\bar{\epsilon}|^2}}[|K_1\rangle + \bar{\epsilon}|K_2\rangle]. \tag{9.12}$$

(9.11), (9.12) に現れる $K_{1,2}$ は CP の固有状態である．なお，(9.5) で擬スカラーの質量固有状態を一般的に表した $P_{1,2}$ に対応するのはここでは $K_{S,L}$ であり $K_{1,2}$ ではないので注意して頂きたい．$\bar{\epsilon}$ が 0 でないと中性 K 中間子の物理的な状態 K_L, K_S はそれぞれ K_2，K_1 の他に K_1，K_2 の成分をわずかに含むことになり，純粋な CP の固有状態ではなくなる．つまり **$\bar{\epsilon}$ は間接的 CP の破れを表現するパラメター**である．

K のシステムでは CP の非対称性は小さく M_{12}, Γ_{12} の虚部は実部に比べてずっと小さいことは述べたが，更に，吸収項の虚部は無視できる：$\mathrm{Im}\Gamma_{12} \simeq 0$. これは，吸収項 Γ は中間状態が on-shell 条件を満たす場合にのみ生じるので中間状態が u クォークの場合にのみ寄与があるが，一方で (7.42) や (7.43) から分かるように $\mathrm{Im}(V_{us}V_{ud}^*) = 0$ であるからである．また，実験データから Δm_K と $\frac{\Delta\Gamma_K}{2}$ の比を角度で表す ϕ_{SW} について

$$\phi_{SW} \equiv -\tan^{-1}\frac{2\Delta m_K}{\Delta\Gamma_K} = (43.51 \pm 0.05)^\circ \tag{9.13}$$

が知られている．ここで $\Delta\Gamma_K = \Gamma_L - \Gamma_S$ $(\simeq -\Gamma_S) = 2\Gamma_{12}$，$\Delta m_K = 2\mathrm{Re}(M_{12})$. これらの事実から (9.5), (9.6), (9.11), (9.12) より

$$\bar{\epsilon} \simeq \sin\phi_{SW}\, e^{i\phi_{SW}} \left(\frac{\mathrm{Im}\, M_{12}}{\Delta m_K}\right) \simeq \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{Im}\, M_{12}}{\Delta m_K}\right) \tag{9.14}$$

のように $\mathrm{Im}\, M_{12}$ を用いて $\bar{\epsilon}$ が表される．

ここで，$\bar{\epsilon}$ は re-phasing の下で動いてしまい，中性 K 中間子における CP 対称性の破れを表す物理量として知られている ϵ とは厳密には区別すべきものであることに注意しよう．特に $\bar{\epsilon}$ の虚部は re-phasing に依存し，そのままでは物理量とはなり得ない．実際，ストレンジネスに関する大域的 $U(1)$ 変換 $s \to e^{i\phi}s$ は，中性 K 中間子に関しては $K^0 \to e^{-i\phi}K^0$, $\bar{K}^0 \to e^{i\phi}\bar{K}^0$ という変換と同じであり，したがって $\frac{q_K}{p_K}(=\frac{1-\bar{\epsilon}}{1+\bar{\epsilon}}) \to e^{-2i\phi}\frac{q_K}{p_K}$ という変換を引き起こす．無限小変換 $|\phi| \ll 1$ の場合を想定すると，微小な $\bar{\epsilon}$ は $\bar{\epsilon} \to \bar{\epsilon} + i\phi$ のように変換し，$\bar{\epsilon}$ の実部 $\mathrm{Re}(\bar{\epsilon}) \simeq \frac{1}{2}(1 - |\frac{1-\bar{\epsilon}}{1+\bar{\epsilon}}|)$ は不変であるのに対し $\mathrm{Im}(\bar{\epsilon})$ は変換を受けるので，そのままでは re-phasing 不変な物理量とはならない．

re-phasing 不変な $\mathrm{Re}(\bar{\epsilon})$ は，次のように "**charge asymmetry**" と呼ばれ

る CP 非対称性を表す物理量 A_L を記述することが分かる.

$$A_L \equiv \frac{\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) - \Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{\Gamma(K_L \to \pi^- l^+ \nu_l) + \Gamma(K_L \to \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} = \frac{|p_K|^2 - |q_K|^2}{|p_K|^2 + |q_K|^2}$$
$$\simeq 1 - \left|\frac{q_K}{p_K}\right| \simeq 2\mathrm{Re}(\bar{\epsilon}) = (3.32 \pm 0.06) \times 10^{-3}. \qquad (9.15)$$

ここで, $(3.32 \pm 0.06) \times 10^{-3}$ は実測値である. もしも CP 対称性が破れていないとすると $K_L = K_2 \;\to\; |q_K/p_K| = 1$ なので A_L は正確に消えるべき物理量である. したがって $\mathrm{Re}(\bar{\epsilon})$ は **"純粋な" 間接的 CP の破れ**を表す物理量であると言える.

先に議論したように, ユニタリー三角形の形状から K のシステムでの CP 非対称性は 10^{-3} 程度であろうと予想されるが, 実際 (9.15) に見られるように $A_L = \mathcal{O}(10^{-3})$ である. ところで, CP 対称性が破れていると, $K_{L,S}$ は純粋に $K_{2,1}$ ではなくなり, したがってもはや量子力学的状態として直交しなくなるが, A_L は K_L, K_S の内積と等価であることが分かる:

$$\langle K_L | K_S \rangle = \frac{2\mathrm{Re}(\bar{\epsilon})}{1 + |\bar{\epsilon}|^2} \simeq 2\mathrm{Re}(\bar{\epsilon}) = A_L. \qquad (9.16)$$

9.2.2 直接的 CP の破れを考慮した解析

考察している崩壊は $K_L \to \pi + \pi$ であるが, 上述の**間接的 CP の破れ**の他に $K^0, \bar{K}^0 \to \pi\pi$ の崩壊振幅そのものにおける CP 対称性の破れである**直接的 CP の破れ**も崩壊に寄与し得る. 両者の違いは, 間接的 CP の破れが $|\Delta S| = 2$ の過程におけるものであるのに対し, 直接的 CP の破れは $|\Delta S| = 1$ の過程におけるものであるという点である.

ところで, パイ中間子はアイソスピン 3 重項をなしアイソスピンの大きさ $I = 1$ を持つ. よって, 考えている崩壊の終状態である 2 つのパイ中間子の状態 $\pi\pi$ は $I = 0$ あるいは $I = 2$ のいずれかの状態に属する ($I = 1$ の状態は, アイソスピンの空間で 2 つのパイ中間子の交換の下で反対称なのでボース統計と矛盾する). そこで $I = 0, 2$ の 2 つの終状態に対応する崩壊の確率振幅を

$$A(K^0 \to \pi\pi(I)) = e^{i\delta_I} A_I \qquad (I = 0, 2) \qquad (9.17)$$

と書く. ここで, A_I は弱い相互作用による崩壊振幅を表し CP 対称性の破れの効果も含み得るので一般には複素数である. 一方, δ_I のほうは, 強い相互作用によって終状態に吸収項が現れることに対応する部分であって, CP 位相とは区別されるべきものである. こうした違いは反粒子 $\bar{K}^0$ の崩壊振幅を考える際に重要となる. $\bar{K}^0$ の崩壊振幅は (9.17) において, A_I を $-A_I^*$ に置き換えることで得られるが $(CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle)$, 一方で $e^{i\delta_I}$ のほうは変換を受けないことに注意しよう. これは強い相互作用は CP 不変であるからである.

8 章で少し述べたが, 振幅 A_0 には FCNC グルーオン頂点による図 9.1 のファ

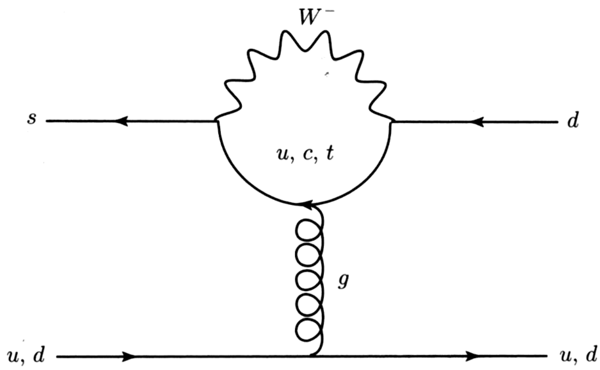


図 9.1 “ペンギン・ダイアグラム”.

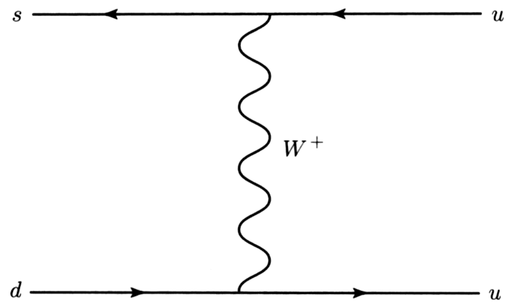


図 9.2 荷電カレントによる $K^0 \to \pi\pi$ 崩壊への寄与.

インマン図，いわゆる**ペンギン・ダイアグラム**が重要な寄与をする．このペンギン・ダイアグラムの寄与が $K \to \pi\pi$ の崩壊において $I=0$ の振幅が $I=2$ の振幅に比べて大きい ($\frac{\mathrm{Re}A_0}{\mathrm{Re}A_2} \simeq 22$) という実験事実を（ある程度）説明することができると考えられている．この事実は $\boldsymbol{\Delta I = \frac{1}{2}}$ **則**と呼ばれているが，それは $I=0$ の場合には，崩壊の際にアイソスピンが $\Delta I = \frac{1}{2}$ だけ変化するのに対して，$I=2$ の場合には $\Delta I = \frac{3}{2}$ であるからである．$\Delta I = \frac{3}{2}$ の弱い相互作用としては，図 9.2 に表されるような通常の荷電カレント相互作用からの寄与が主である．$\Delta I = \frac{3}{2}$ における CP 対称性の破れに寄与するものとしては，図 9.1 のグルーオンを光子 γ や Z ボソンで置き換えて得られる **“電弱ペンギン (electro-weak penguin)”・ダイアグラム**からの寄与が重要となる．

実際には終状態は $\pi^+\pi^-$ か $\pi^0\pi^0$ のいずれかである．それぞれの終状態に関して，CP 対称性の破れ（CP 非対称性）を表す物理量を次のように $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon'}$ という 2 つのパラメターを用いて定義する：

$$\eta_{+-} \equiv \frac{A(K_L \to \pi^+\pi^-)}{A(K_S \to \pi^+\pi^-)} \equiv \epsilon + \epsilon', \tag{9.18}$$

$$\eta_{00} \equiv \frac{A(K_L \to \pi^0\pi^0)}{A(K_S \to \pi^0\pi^0)} \equiv \epsilon - 2\epsilon'. \tag{9.19}$$

ϵ は終状態に依存しない部分を表すのに対し ϵ' は終状態に依存する部分を表し

ている．$\bar{\epsilon}$ で表される間接的 CP の破れは終状態に無関係に存在するものなので，$\bar{\epsilon}$ は ϵ にのみ寄与する．こうしたことを以下で具体的に見てみよう．

まず，$K_L \to \pi\pi$ には質量固有状態における CP 対称性の破れである間接的 CP の破れと，崩壊振幅そのものにおける CP 対称性の破れである直接的 CP の破れの両方が寄与するはずである．実際

$$\frac{A(K_L \to \pi\pi)}{A(K_S \to \pi\pi)} \simeq \frac{\bar{\epsilon}A(K_1 \to \pi\pi) + A(K_2 \to \pi\pi)}{A(K_1 \to \pi\pi)} = \bar{\epsilon} + \frac{A(K_2 \to \pi\pi)}{A(K_1 \to \pi\pi)} \tag{9.20}$$

が終状態に依らずに言える．最後の式の 1 項目は間接的 CP の破れにより K_L の中に K_1 が混じることによる効果を表すのに対して，2 項目は K_2 が $\pi\pi$ に崩壊するという，正に崩壊過程そのものにおける直接的 CP の破れを表す項である．また，A_0, A_2 の大きさを比較すると，$\Delta I = \frac{1}{2}$ 則より分かるように A_0 のほうが勝ると考えてよい．角運動量の合成の議論で用いられる**クレブシュ・ゴルダン係数**を使うと 2 つの終状態は

$$|\pi^+\pi^-\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi\pi(I=0)\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi\pi(I=2)\rangle, \tag{9.21}$$

$$|\pi^0\pi^0\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\pi\pi(I=0)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\pi\pi(I=2)\rangle, \tag{9.22}$$

と表される．よって (9.20) より，A_2 の寄与が A_0 に比べて小さいことから次の近似式が容易に導かれる．

$$\epsilon \simeq \bar{\epsilon} + i\left(\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right), \tag{9.23}$$

$$\begin{aligned}\epsilon' &\simeq \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i(\delta_2-\delta_1)}\mathrm{Im}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)\\ &\simeq \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i(\delta_2-\delta_1)}\left(\frac{\mathrm{Re}A_2}{\mathrm{Re}A_0}\right)\left(\frac{\mathrm{Im}A_2}{\mathrm{Re}A_2} - \frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}\right).\end{aligned} \tag{9.24}$$

なお (9.18), (9.19) において ϵ' の寄与が -2 倍違うのは，(9.21), (9.22) のクレブシュ・ゴルダン係数の比

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)} = -2 \tag{9.25}$$

から来ていることに注意しよう．

ところで崩壊振幅を記述する ϵ, ϵ' は re-phasing 不変であると期待される．実際，仮に小さな振幅である A_2 を無視したとすると

$$\epsilon = \frac{A(K_L \to \pi\pi)}{A(K_S \to \pi\pi)} = \frac{1 - \frac{q_K}{p_K}\frac{A_0^*}{A_0}}{1 + \frac{q_K}{p_K}\frac{A_0^*}{A_0}} \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q_K}{p_K}\frac{A_0^*}{A_0}\right) \tag{9.26}$$

と書けるが，ストレンジネスに関わる $U(1)$ 変換の下で $K^0, \bar{K}^0$ は逆位相で変換するので，その係数の変換は $\frac{q_K}{p_K} \to e^{-2i\phi}\frac{q_K}{p_K}$ であり，また $A_0 \to e^{-i\phi}A_0$ と変換する．よって，これらの組合せである $\frac{q_K}{p_K}\frac{A_0^*}{A_0}$，したがって ϵ は re-phasing の下で不変であることが分かる．$\frac{q_K}{p_K}$ は $\bar{\epsilon}$ で書けるので，このことは，間接的 CP の破れを表す $\bar{\epsilon}$ と直接的 CP の破れを表す $\mathrm{Im}(A_0)$ の寄与の和が re-phasing の下で不変になるということである．より正確には $U(1)$ 変換を微小変換とすると (9.23) より分かるように $\mathrm{Im}\bar{\epsilon} + \frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}$ が re-phasing 不変になり，一方 (9.15) から分かるように $\mathrm{Re}\,\bar{\epsilon}$ はそれ自身で re-phasing 不変である．

このように，ϵ には間接的 CP の破れと直接的 CP の破れの両方が寄与し得るが，実際には例えば (7.45) に見られるように A_0 に寄与するペンギン・ダイアグラムでの小林・益川行列要素 $V_{cs}^* V_{cd}$ の虚部が無視できるほど小さいことから，直接的 CP の破れの寄与 $\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}$ は $\bar{\epsilon}$ に比べて相対的に小さいことが分かる．即ち $\epsilon \simeq \bar{\epsilon}$ と見なせる．こうして，小林・益川の 3 世代模型による標準模型の予言は，箱形ダイアグラムの寄与を表す係数関数 $E(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}\epsilon \ \simeq \ \bar{\epsilon} \ \simeq \ & - e^{\frac{\pi}{4}i}\frac{\alpha G_F}{24\pi \sin^2\theta_W}\frac{B m_K f_K^2}{\Delta m_K} \\ & \times \left[\mathrm{Im}(\lambda_c^2)E(x_c) + \mathrm{Im}(\lambda_t^2)E(x_t) + 2\mathrm{Im}(\lambda_c\lambda_t)E(x_c, x_t)\right] \\ = \ & - 1.7\times 10^4 e^{\frac{\pi}{4}i} B\left[\mathrm{Im}(\lambda_c^2)E(x_c)\right. \\ & \left. + \mathrm{Im}(\lambda_t^2)E(x_t) + 2\mathrm{Im}(\lambda_c\lambda_t)E(x_c, x_t)\right] \end{aligned} \tag{9.27}$$

で与えられる．(9.27) は (9.14), $\mathrm{Im}(M_{12}) = -\mathrm{Im}\,\langle K^0|\mathcal{L}_{eff}^{|\Delta S|=2}|\bar{K}^0\rangle$, (8.7), (8.12) を用いて得られる．また $\lambda_i = V_{is}V_{id}^*$. より正確な数値的予言が必要な場合には，(9.27) に摂動論的 QCD による量子補正の因子を掛ける必要がある．一方，この物理量の実験値は

$$|\epsilon| = (2.228 \pm 0.011)\times 10^{-3} \tag{9.28}$$

である．(9.27) と (9.28) を比較することにより，トップクォーク質量は $m_t =$ 171GeV と分かっているので，(7.45) のパラメターを用いると $2A^4\lambda^{10}(1-\rho)\eta$ で表される $\mathrm{Im}(\lambda_t^2)$ 等に対する重要な情報を得ることができる．こうした情報はユニタリー三角形の形状を決めるのに有用である．

直接的 CP の破れでのみ生じる ϵ' の予言に関しては，$\frac{\mathrm{Im}A_2}{\mathrm{Re}A_2}$ と $\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}$ という競合する効果があり，きちんとした予言は難しい．つまり，$|\mathrm{Im}A_2|$ は $|\mathrm{Im}A_0|$ より小さいが $\Delta I = 1/2$ 則のために電弱ペンギン・ダイアグラムから来る $\mathrm{Im}A_2$ の寄与が相対的に重要となるからである．更に，電弱ペンギン・ダイアグラムに寄与する FCNC $\bar{s}dZ$ 頂点のウィルソン係数に含まれる $\Gamma^Z(x_t)$ は中間状態の t クォークによる x_t，したがって m_t^2 に大雑把に比例する “non-decoupling” 効果を持ち，これが通常の（グルーオンによる）ペンギン・ダイアグラムからの寄与

による $\frac{\mathrm{Im}A_0}{\mathrm{Re}A_0}$ の項を相殺する傾向があることが指摘されている．このため，ϵ' の予言値はナイーブに期待するより小さくなり得る：$|\frac{\epsilon'}{\epsilon}| = \mathcal{O}(10^{-4})$ to $\mathcal{O}(10^{-3})$．一方で現在の実験データは

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) \approx \frac{\epsilon'}{\epsilon} = (1.65 \pm 0.26) \times 10^{-3} \tag{9.29}$$

であるので，ほぼ理論の予言値と一致している．

一般に，物理量に CP 対称性の破れが生じるためには CP 位相と世代間混合，クォーク質量の差に加えて，実際には異なる確率振幅の間の干渉効果が本質的に重要となる．それは仮に 1 つの確率振幅のみが物理量に寄与したとすると，適当な re-phasing で確率振幅の位相を消すことができてしまう場合があるからである．例えば ϵ' においては (9.24) の $\mathrm{Im}(\frac{A_2}{A_0})$ に見られるように，寄与する 2 種類の振幅 A_0 と A_2 の間の干渉が重要であり，これらの位相が相対的にずれているときにのみ ϵ' が残ることが分かる．実際，$\mathrm{Im}(\frac{A_2}{A_0})$ はストレンジネスに関わる re-phasing の下で不変であり（A_0, A_2 が同位相で変換する）re-phasing で消すことはできない．

本節の最後に，それぞれの物理量に関して，CP 対称性の破れの起源が K の質量行列における $|\Delta S| = 2$ の間接的 CP の破れに起因するのか，崩壊振幅における $|\Delta S| = 1$ の直接的 CP の破れに起因するのか，あるいは，これらの干渉によるのかについてまとめてみることにしよう：

- 純粋に間接的 CP の破れによるもの：$\mathrm{Re}\,\epsilon\,(A_L)$.
- 間接的 CP の破れと直接的 CP の破れの間の干渉効果によるもの：$\mathrm{Im}\,\epsilon$.
- 純粋に直接的 CP の破れによるもの：ϵ'.

9.3 中性 B 中間子系における CP 対称性の破れ

小林・益川模型における CP 対称性の破れを視覚的に記述するユニタリー三角形は小林・益川行列の 3 つの列ベクトルの間の直交性を表すもので，3 種類の独立な三角形が存在する．そのうちで，d, s クォークに関わる d 列と s 列の直交性を表す三角形は K 中間子系における CP 対称性の破れに関係するが，それ以外にも b, d クォークに関わる三角形，b, s クォークに関わる三角形もあり，これらは B_d 中間子，B_s 中間子のシステムでも CP 対称性の破れが存在することを端的に示している．小林・益川模型では 3 世代すべてが関わって CP 対称性が破れるのであるから，どの世代のクォークに関する中間子にも CP 非対称性が現れるのは自然であると言える．特に 7.2 および 7.3 節で議論したように B_d 中間子系におけるユニタリー三角形は 3 つの辺の長さがほぼ同じオーダーであるがために内角は大きく，したがって $\mathcal{O}(10\%)$ 程度の大きな CP 非対称性が現れることが期待できる．つまり，小林・益川行列においては CP 対称性の

破れを司っているのはヤールスコッグ・パラメターという唯一のパラメターであるが，B 中間子の場合には第 3 世代と 1, 2 世代との混合が小さいために CP 非対称性が相対的に大きく出る，ということが起きるのである．B_d 中間子系においてこうした**大きな CP 非対称性**が現れ得ることを最初に指摘したのは**三田（三田一郎，A.I.Sanda）**らである [9]．この**小林・益川模型特有の予言**の検証を主目的とした実験が，日本の KEK の **Belle 実験**，アメリカの SLAC の **BaBar 実験**のような **B 工場実験**である．これらの実験が，小林・益川模型の予言どおりの大きな CP 非対称性の存在を確認したことも 2008 年度の小林，益川両教授のノーベル賞受賞に貢献したものと思われる．

この節では，主に B_d 中間子のシステムに関する CP 対称性の破れを論じたい．そこで，特に断らない限り B_d を単に B^0 と略記する．上で述べたように，B システムにおける CP 対称性の破れも K におけるものと起源は同じであるが，実際の CP 非対称性の検出の手法は以下に述べるようにかなり異なる．即ち，すぐ後で議論するように B のシステムでは $\Delta\Gamma \ll \Delta m \sim \Gamma$ であるために，中性 K 中間子系の場合とは異なり 2 つの質量固有状態の寿命の差は小さく，したがって K_L に相当するような（ほぼ）CP の固有状態である状態を単独に取り出し，その崩壊により CP 対称性の破れを検証するということは現実的には難しい．よって，B 工場実験の場合のように加速器で B^0, $\bar{B}^0$ のペアが生成された場合，それらは 2 つの質量固有状態（これらを B_1, B_2 と書くことにしよう）の重ね合せなので，質量固有状態の間の干渉効果によって Δm を角振動数として，ちょうどニュートリノ振動のように $\boldsymbol{B^0}$ **と** $\boldsymbol{\bar{B}^0}$ **の間で"振動"しながら伝播**していくことになる．ただし，ニュートリノ振動の場合と違い B 中間子は不安定で，寿命 τ 程度の時間で崩壊してしまう．以下で述べるように，B 中間子系における $\mathcal{O}(10\%)$ 程度の**大きな CP 非対称性**はこの $\boldsymbol{B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0}$ **混合**の結果として生じることが分かるので，寿命 τ の間にある程度混合を起こすことが重要であるが，幸い B のシステムでは，τ の間の振動の度合いを表す，角振動数 Δm に τ を掛けた無次元量 x は実験データより

$$x = \Delta m \cdot \tau = \frac{\Delta m}{\Gamma} = 0.774 \pm 0.008 \tag{9.30}$$

である．よって x は適度な大きさを持ち，こうした CP 非対称性の検証には適した状況である．ここで $\Gamma = 1/\tau$ は B^0 の崩壊幅である．

(9.30) は標準模型の予言値と良い一致を示している．次の例題を参照されたい．

> **例題 9.1**　Δm は K 中間子の場合の図 8.1 と同様の箱型ダイアグラム，図 9.3(a)（147 頁）の寄与として求められる．このダイアグラムの寄与を求め，(9.30) の x をトップクォーク質量の関数として求めなさい．また Particle Data Group の提供するデータ [10] を参考に，x を数値的にも求めなさい．

解 Δm は K 中間子の場合の (8.13) と同様にして求められるが，B_d 中間子系においては，ユニタリー三角形（図 7.3(イ)）を見ると分かるように 3 つの辺の長さはほぼ同じオーダーであり K 中間子系の場合と違って t クォークの関与する小林・益川行列の要素は抑制されない：$|V_{ub}^* V_{ud}| \sim |V_{cb}^* V_{cd}| \sim |V_{tb}^* V_{td}|$. 一方，箱型ダイアグラムにおける中間状態のクォークの寄与を表す関数 $E(x_i)$ $(i = c, t)$ ((8.11) 式）は $x_i \gg 1$ の場合には $-\frac{1}{4}x_i = -\frac{1}{4}\frac{m_i^2}{M_W^2}$ のような non-decoupling 効果を示す．したがって，小林・益川行列要素の寄与が同程度であるため t クォークの寄与が Δm において支配的になる．こうして (8.13) を B 中間子の場合に適用して Δm を $x_t = \frac{m_t^2}{M_W^2}$ の関数として求めることができる．これを用いると x は

$$x \simeq -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{6\pi \sin^2\theta_W \Gamma} f_B^2 \, m_B \, B_B \, |V_{tb} V_{td}^*|^2 \, E(x_t) \tag{9.31}$$

のように与えられる．ここで f_B, B_B は B_d 中間子に関する崩壊定数と bag-parameter である．Particle Data Group のデータ [10] 等から，$m_t \simeq 170\,\mathrm{GeV}, m_B \simeq 5.3$ (GeV), $\Gamma \simeq 4.3 \times 10^{-10}$ (MeV), $f_B\sqrt{B_B} \simeq 220\,\mathrm{MeV}$, $|V_{tb} V_{td}^*| \sim 8.4 \times 10^{-3}$ なので，これらを (9.31) に代入すると $x \simeq 1.4$ が得られ，ほぼデータ (9.30) を再現できることが分かる．これに摂動論的 QCD による補正因子 $\eta_t^B = 0.55$ を掛けると [9] データとのより良い一致が得られる． □

ここで注意したいのは，パラメター x は (9.31) に見られるように $E(x_t) = E(\frac{m_t^2}{M_W^2}) \sim \frac{m_t^2}{M_W^2}$，したがって粗く言うと（$t$ クォークの non-decoupling 効果 [4] により）m_t^2 に比例することである．したがって，仮にトップクォークの質量が当初考えられていたように M_W よりかなり小さいとすると x はずっと小さな値になり，CP 非対称性の検出は容易ではなかったはずである．その意味で t クォークが重かったのは幸運であると言える．

なお，B_s 中間子系に関する x に関しては $|V_{ts}/V_{td}|^2 \sim 22$ であるために B_d の場合よりこの程度大きくなると期待される．実際 CDF 実験により，このパラメターに関してほぼ 23 というデータが得られていて $B_s \leftrightarrow \bar{B}_s$ の振動が速いことが分かる．

9.3.1 中性 B 中間子系の時間発展

上述のように B 中間子系における CP 非対称性の検証においては，最初に B^0 や $\bar{B}^0$ で生成された状態が $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ という振動を起こしながらどのように時間発展していくのかを理解することが重要になる．

一般に B^0 と $\bar{B}^0$ の混合した状態を時刻を t として $\psi(t) = c(t)\,|B^0\rangle + \bar{c}(t)\,|\bar{B}^0\rangle$ と書くと，この状態の時間発展は 2 状態系のハミルトニアンを H として微分

方程式

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c(t) \\ \bar{c}(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} c(t) \\ \bar{c}(t) \end{pmatrix} \tag{9.32}$$

で記述される．ここで H は既に (9.2), (9.3), (9.4) に与えられているが，今は中性 B 中間子のシステムについて考えているので，例えば M_{12} は箱型ダイアグラムにより生じる $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 混合を表している．(9.5) に与えられている質量固有状態（今の場合 P_1, P_2 は B 中間子系の質量固有状態を表す B_1, B_2 である）の基底に移ってハミルトニアンを

$$\frac{\sqrt{|p|^2+|q|^2}}{2pq}\begin{pmatrix} q & -p \\ q & p \end{pmatrix} H \frac{1}{\sqrt{|p|^2+|q|^2}}\begin{pmatrix} p & p \\ -q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{9.33}$$

のように対角化することにより，(9.32) は以下のように容易に解くことができる：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c(t) \\ \bar{c}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & p \\ -q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2p} & -\frac{1}{2q} \\ \frac{1}{2p} & \frac{1}{2q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(0) \\ \bar{c}(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_+(t) & -\frac{p}{q}g_-(t) \\ -\frac{q}{p}g_-(t) & g_+(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(0) \\ \bar{c}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.34}$$

ここで $g_\pm(t)$ は

$$\begin{aligned} g_\pm(t) &\equiv \frac{1}{2}\left[e^{-i\lambda_1 t} \pm e^{-i\lambda_2 t}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{\Gamma_1}{2}t}e^{-im_1 t}\left[1 \pm e^{-\frac{\Delta\Gamma}{2}t}e^{-i\Delta m t}\right] \end{aligned} \tag{9.35}$$

で与えられる．

B 工場実験のような電子・陽電子衝突実験では，最初に生成されるのは B^0, $\bar{B}^0$ のペアであるので，$|B^0(t)\rangle$ および $|\bar{B}^0(t)\rangle$ を，$t=0$ で $|B^0(0)\rangle = |B^0\rangle$, $|\bar{B}^0(0)\rangle = |\bar{B}^0\rangle$ であるような状態であるとする．例えば $|B^0\rangle$ は $c(0)=1, \bar{c}(0)=0$ の状態であるので，

$$|B^0(t)\rangle = g_+(t)|B^0\rangle - \frac{q}{p}g_-(t)|\bar{B}^0\rangle, \tag{9.36}$$

$$|\bar{B}^0(t)\rangle = g_+(t)|\bar{B}^0\rangle - \frac{p}{q}g_-(t)|B^0\rangle \tag{9.37}$$

のように時刻 t における状態が決まる．

(9.36) より，$t=0$ に B^0 として生成された B 中間子が時刻 t に B^0 あるいは $\bar{B}^0$ として存在する，“生き残り確率 (survival probability)” あるいは “遷移確率” はそれぞれ次のように与えられる：

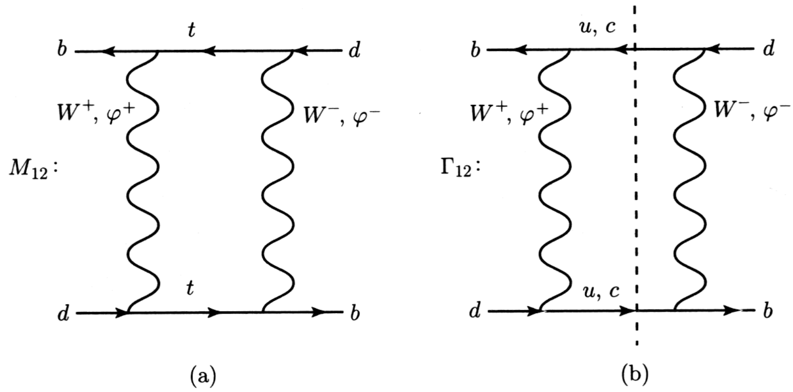


図 9.3 $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 混合を引き起こす箱型ダイアグラムの散逸項 (a) と吸収項 (b).

$$
\begin{aligned}
P(B^0 \to B^0) &= |\langle B^0|B^0(t)\rangle|^2 = |g_+(t)|^2 \\
&\simeq e^{-\Gamma t}\cos^2\left(\frac{\Delta m}{2}t\right),
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

$$
\begin{aligned}
P(B^0 \to \bar{B}^0) &= |\langle \bar{B}^0|B^0(t)\rangle|^2 = \left|\frac{q}{p}\,g_-(t)\right|^2 \\
&\simeq \left|\frac{q}{p}\right|^2 e^{-\Gamma t}\sin^2\left(\frac{\Delta m}{2}t\right).
\end{aligned}
\tag{9.39}
$$

ここで，$\Delta\Gamma \ll \Gamma_{1,2}$, $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \simeq \Gamma$ という B 中間子系特有の性質を用いて近似した．少しこの事実について説明しておこう．既に述べたように B_d 中間子系においてはユニタリー三角形の 3 つの辺の長さはすべて同じオーダーである：$|V_{ub}^*V_{ud}| \sim |V_{cb}^*V_{cd}| \sim |V_{tb}^*V_{td}|$．一方で，$\boldsymbol{\Delta m}$, $\boldsymbol{\Delta\Gamma}$ はそれぞれ，**箱型ダイアグラムの "散逸項"**（off-shell の中間状態からの寄与）および **"吸収項"**（on-shell の中間状態からの寄与）である $\boldsymbol{M_{12}}$, $\boldsymbol{\Gamma_{12}}$ で与えられるが，図 9.3 に見られるように，これらに（主に）寄与する中間状態は t クォークおよび u, c クォークである．

それは，吸収項に関しては，u, c クォークのみが on-shell 状態になり得るのに対して，散逸項に関しては u, c, t クォークすべてが寄与し得るからである．一方，中間状態のクォークの寄与を表す関数 $E(x_i)$ $(i = c, t)$ については $E(x_t)$ の寄与が支配的である．したがって散逸項に関しては t クォークの寄与が支配的になるのに対して，吸収項は B 中間子の崩壊幅に関係するので m_b^2 にほぼ比例すると思われる．こうして，吸収項は散逸項に比べ $\mathcal{O}(m_b^2/m_t^2) \ll 1$ だけ抑制されることになり，これが $\Delta\Gamma$ がほぼ無視できる理由である．

実験的には生成から検出までの時間 t を同定しない場合が多いので，時間平均した遷移確率と生き残り確率の比 r を求めると

$$
r \equiv \frac{\int_0^\infty P(B^0 \to \bar{B}^0)dt}{\int_0^\infty P(B^0 \to B^0)dt} \simeq \frac{x^2}{2+x^2}. \tag{9.40}
$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-\Gamma t}\cos(\Delta m t)\,dt = \frac{1}{\Gamma}\frac{1}{1+x^2} \qquad \left(x = \frac{\Delta m}{\Gamma}\right) \tag{9.41}$$

の公式を用いた．また，すぐ後で述べる $|\frac{q}{p}| \simeq 1$ という近似を用いた．電子・陽電子衝突実験においては，r は以下のような，B^0 や $\bar{B}^0$ の崩壊により同符号の電荷の荷電レプトンが生成される事象数を，異符号の電荷のレプトンが生成される事象数で割ることで測定することが可能である：

$$\frac{N_{l^+l^+} + N_{l^-l^-}}{N_{l^+l^-}} \simeq 2r. \tag{9.42}$$

ここで r は小さいとし，また CP 対称性の破れを無視して (9.40) は B^0 と $\bar{B}^0$ を入れ換えても同じであると仮定した．同符号の電荷のレプトンが存在できるのは，電子・陽電子衝突実験では B^0, $\bar{B}^0$ がペアで生成されるが $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 振動のために 2 つの B 中間子が共に B^0 あるいは $\bar{B}^0$ となり得るからである（ただし，通常の B 工場実験のように同時刻においては同一の中間子として存在することはできない場合もある）．すると，$b \to c + l^- + \bar{\nu}_l$ や $\bar{b} \to \bar{c} + l^+ + \nu_l$ といった崩壊によって同電荷の荷電レプトンが生成されることが可能になるのである．$B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 混合（振動）の度合いを示す Δm に関する情報は，この r の測定によって初めて得られ，それを用いて混合に支配的な寄与を与える t クォークの質量 m_t の下限値が与えられた．

9.3.2 中性 B 中間子系における，純粋な間接的 CP の破れ

いよいよ中性 B 中間子系における CP 対称性の破れを考えてみよう．まずは $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 混合における，即ち中性 B 中間子系の質量行列における CP 対称性の破れである "**間接的 CP の破れ**" に注目しよう．純粋に間接的 CP の破れによる物理量としては K 中間子のときの A_L (9.15) に対応する，以下のように定義される "**charge asymmetry**" を考えることができる：

$$\frac{|N_{l^+l^+} - N_{l^-l^-}|}{N_{l^+l^+} + N_{l^-l^-}}. \tag{9.43}$$

これは $P(B^0 \to \bar{B}^0) - P(\bar{B}^0 \to B^0)$ の差によって生じる量なので，CP 対称性の破れを表す物理量であるが，一方で $B^0 \to \bar{B}^0$ と $\bar{B}^0 \to B^0$ は時間反転によって互いに移り変わるので，T 対称性の破れを表す物理量とも考えられる．**CPT 定理**より当然両者は等価である．

(9.36), (9.37) より charge asymmetry は

$$\left|\frac{q}{p}\right|^2 - \left|\frac{p}{q}\right|^2 \neq 0 \quad \leftrightarrow \quad \left|\frac{q}{p}\right| \neq 1 \tag{9.44}$$

のときにのみ生じることが分かるが，残念ながら B 中間子系では $|\frac{q}{p}|$ の 1 からのずれは非常に小さいことが理論的に分かり，純粋に間接的 CP の破れによる

物理量の検証は難しい．その理由は次のようである．

図 9.3 に見られるように，吸収項 Γ_{12} は中間状態の u, c クォークからの寄与によるものであるが，これらの質量は M_W や m_t に比べ非常に小さいので仮に $m_u = m_c \simeq 0$ と近似してしまうと，小林・益川行列の直交性，$V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} = -V_{tb}^* V_{td}$ から，t クォークの寄与が支配的な M_{12} と，u, c クォークの寄与による Γ_{12} において，小林・益川行列の寄与は全く同じになる．一方で，(9.6) に見られるように，M_{12} と Γ_{12} が全く同じ（CP 対称性の破れによる）位相因子を持つとすると $|\frac{q}{p}| = 1$ となってしまう．これは，$\frac{q}{p}$ そのものが CP 対称性の破れのために大きな位相を持つ場合でも言えることである．物理的には，M_{12} と Γ_{12} が共通の位相を持つ場合には re-phasing により位相を消してしまうことが可能なので，当然の結果であるとも言える．この議論から分かることは，$|\frac{q}{p}|$ の 1 からのずれは $m_c \neq m_u$ の場合にのみ生じ，したがって $(m_c^2 - m_u^2)/m_t^2 = \mathcal{O}(10^{-4})$ のように強く抑制されるということである．ここで $m_c^2 - m_u^2$ を m_t^2 で割ったのは，m_t が大きく $\Gamma_{12}/M_{12} \to 0$ となる極限では，(9.6) よりやはり $|\frac{q}{p}|$ が 1 になってしまうからである．こうして，小林・益川模型では $|\frac{q}{p}|$ の 1 からのずれは非常に小さいことが予言されるのである．

純粋に間接的 CP の破れによる効果を検証することが難しいのであれば，K 中間子系の場合の ϵ' に相当するような，純粋に直接的 CP の破れによる効果を見るのはどうであろうか．残念ながらこの場合には理論的な不定性があり，確固とした標準模型の予言を行うことがなかなか難しい．$|\Delta B| = 1$（$B : b, \bar{b}$ クォークのみが持つ "ボトム数"）の崩壊振幅に現れる直接的 CP の破れの効果は，ある終状態 f およびその CP 共役な状態 $\bar{f}$ への部分崩壊幅の差 $\propto \Gamma(B^0 \to f) - \Gamma(\bar{B}^0 \to \bar{f})$（CPT 定理より全崩壊幅については B^0 と $\bar{B}^0$ で完全に等しい）に現れるが，ϵ' に関して少し説明したように，そうした崩壊幅の差が生じるためには少なくとも 2 つの独立な確率振幅（ファインマン図）の寄与が互いに干渉し合うことが必要となる．しかし，異なる振幅には，異なる位相を出す吸収項が一般に存在し，特に吸収項が強い相互作用による場合には摂動論的計算も無力であるのできちんとした解析が難しいのである．

9.3.3 間接的および直接的 CP の破れの干渉効果による大きな CP 非対称性

こうして，本来大きいはずの中性 B 中間子系における大きな CP 対称性の破れを見るための残る可能性は，$|\Delta B| = 2$ の間接的 CP の破れと $|\Delta B| = 1$ の直接的 CP の破れの**干渉効果による CP 非対称性**である．これはちょうど K 中間子系のときに議論した **Im(ϵ) に相当**する物理量である．実際，この干渉効果による CP 非対称性は，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0 \to f)}{A(B^0 \to f)}\right) \tag{9.45}$$

で表されるが，これは (9.26) に見られるように K システムでの $-2\mathrm{Im}\,\epsilon$ に対応していることが分かる．このタイプの CP 非対称性は $\mathcal{O}(10\%)$ 程度に大きくなり得ることが三田らにより示された[9]．この CP 非対称性のもう一つの好ましい性質は，上で純粋な直接的 CP 対称性の破れの場合に議論したような強い相互作用による位相因子が，終状態 f として CP“自己共役” な，即ち $\bar{f}=\pm f$ を満たすような状態を選ぶことで (9.45) の分母と分子の間で正確に相殺することである．そのような f の典型的な例としては B 工場実験で採用された ψK_S がある．(9.45) に $\frac{q}{p}$ が現れることから想像がつくが，このタイプの CP 非対称性においては $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 混合が本質的に重要である．より正確には，この CP 非対称性は，$B^0\,(\bar{B}^0)$ として生成された粒子がそのまま “生き残り”，f に崩壊する $B^0(\bar{B}^0) \to f$ の振幅と，$B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 振動を経て $B^0(\bar{B}^0) \to \bar{B}^0(B^0) \to f$ と崩壊する振幅の干渉効果を見ていることになる．実際，$\mathrm{Im}\,(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)})$ を $\frac{1}{|A(B^0\to f)|^2}\,\mathrm{Im}\,(\frac{q}{p}\;A(\bar{B}^0 \to f)\,A(B^0 \to f)^*)$ と書き換えてみると，こうした干渉が効いていることがはっきりするであろう．こうして，この CP 非対称性を観測するには Δm が適当な値を持ち $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 振動が寿命の間に十分に起きることが重要となるが，一方であまり振動が速すぎて B^0, $\bar{B}^0$ が全く同等になってしまうと，これらの差で生じる非対称性も消えてしまう．実際には (9.30) のように $x \simeq 0.77$ であり適度な振動が実現している．これからの教訓は B_s 中間子系の場合には振動が速すぎて，こうしたタイプの CP 非対称性を見るのは容易ではないであろうということである．

この (9.45) で表される大きな CP 非対称性を $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 振動の下で実際にどのように検証可能か考えてみよう．例えば電子・陽電子衝突型加速器実験では $e^+e^- \to B^0\bar{B}^0$, B^+B^- のように粒子・反粒子はペアで生成されるので，2 つ生成された中性 B 中間子のどちらが B^0 なのかあらかじめ知ることはできない．このことが CP 非対称性の観測を難しくする要因である．

考えやすくするために，まずは，時刻 $t=0$ で B^0 や $\bar{B}^0$ が生成されたことが分かっていたという理想的な状況を想定する．この場合，時刻 t における状態 $B^0(t)$ や $\bar{B}^0(t)$ は (9.36), (9.37) で与えられる．CP 非対称性は，このように B^0 あるいは $\bar{B}^0$ として生成された中間子が時刻 t で終状態 f あるいは $\bar{f}$ に崩壊する確率（事象数）の差を，それらの和で割ることで定義することが可能である．この時間に依存した **CP 非対称性**を $\boldsymbol{A(t)}$ と書くと，

$$A(t) \equiv \frac{P(B^0(t) \to f) - P(\bar{B}^0(t) \to \bar{f})}{P(B^0(t) \to f) + P(\bar{B}^0(t) \to \bar{f})} \tag{9.46}$$

である．ここで

$$P(B^0(t) \to f) \propto \left| g_+(t)A(B^0 \to f) - \frac{q}{p}g_-(t)A(\bar{B}^0 \to f)\right|^2, \tag{9.47}$$

$$P(\bar{B}^0(t) \to \bar{f}) \propto \left| g_+(t)A(\bar{B}^0 \to \bar{f}) - \frac{p}{q}g_-(t)A(B^0 \to \bar{f})\right|^2 \tag{9.48}$$

である.

既に議論したように，大変良い近似で $|\frac{q}{p}|=1$ と置くことが可能である．更に終状態として，既に述べたような CP 自己共役な状態 $\bar{f}=\pm f$ を想定しよう．そうすることによって $B^0 \to f$ と $\bar{B}^0 \to f$ という 2 つの異なる崩壊過程の間の干渉が可能になる．また $\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)}$ の比をとることで強い相互作用により生じる位相 "strong phase" の不定性を除去することも可能となる．より正確には，f への崩壊に効くファインマン図が複数あり，それらが異なる strong phase を持つと位相の相殺は言えなくなってしまうので，今後 f としては 1 つのファインマン図（普通は tree レベル）が支配的寄与を与えるような崩壊を想定する．先に述べたように，典型的な例は $f=\psi K_S,\ \pi\pi$ などである．こうしたことから $A(t)$ は，(9.46), (9.47), (9.48) より

$$\left\{\cos(\Delta mt)[\Gamma(B^0\to f)-\Gamma(\bar{B}^0\to f)]+2\sin(\Delta mt)\Gamma(B^0\to f)\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{Im}\left(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)}\right)\right\}\Big/\left[\Gamma(B^0\to f)+\Gamma(\bar{B}^0\to f)\right] \tag{9.49}$$

と表される．ここで部分崩壊幅は崩壊振幅の絶対値 2 乗に比例すること，

$$\Gamma(B^0\to f)\propto|A(B^0\to f)|^2,\quad \Gamma(\bar{B}^0\to f)\propto|A(\bar{B}^0\to f)|^2 \tag{9.50}$$

および $|\frac{q}{p}|=1\to\frac{p}{q}=(\frac{q}{p})^*$ を用いた．(9.49) の分子において，$\cos(\Delta mt)$ の項は $t=0$ でも消えず，一方 $t=0$ では $B^0\leftrightarrow\bar{B}^0$ 振動は起きていないので，この項は純粋に $|\Delta B|=1$ の崩壊過程における**直接的 CP の破れ**を表していると言える．一方で，$\sin(\Delta mt)$ の項は当然 $t=0$ で消えるが，これが箱型ダイアグラムによる $|\Delta B|=2$ 過程と $|\Delta B|=1$ の崩壊過程の間の**干渉により生じる大きな CP 非対称性**を示す項に他ならない．上述のように f としては 1 つの崩壊振幅（ファインマン図）が支配的であるような状態を選んでいるので，実際には $\cos(\Delta mt)$ に比例する直接的 CP の破れの効果は小さい：$\Gamma(B^0\to f)\simeq\Gamma(\bar{B}^0\to f)$．こうして，最終的に CP 非対称性の表式は単純になり

$$A(t)\simeq\sin(\Delta mt)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)}\right) \tag{9.51}$$

で与えられる．

実験的には崩壊の時刻 t を同定するのは容易ではないので，t に関して積分し時間平均したものを考えるのが現実的に思えるが，$\sin(\Delta mt)$ の時間平均はゼロであるので，大きな CP 非対称性 $\mathrm{Im}\,(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)})$ があったとしてもその効果は消えてしまうように思える．実際，仮に $\Gamma=0$ であるとすると CP 非対称性は消えてしまうが，B 中間子は不安定な粒子で Γ は 0 ではなく，CP 非対称性が薄まる効果は不完全である．これは先に議論したことと本質的に同じことを言っていて，この CP 非対称性を見るには x が（現実にそうであるように）

適度の大きさである必要があるということである．実際に時間積分を実行してみると

$$\left(\int_0^\infty e^{-\Gamma t}\sin(\Delta m t)\,dt\right)\Big/\left(\int_0^\infty e^{-\Gamma t}\,dt\right)=\frac{x}{1+x^2} \tag{9.52}$$

より，**時間平均した CP 非対称性 *A*** が

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{\int_0^\infty dt\,[P(B^0(t)\to f)-P(\bar{B}^0(t)\to \bar{f})]}{\int_0^\infty dt\,[P(B^0(t)\to f)+P(\bar{B}^0(t)\to \bar{f})]} \\ &= \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)}\right) \end{aligned} \tag{9.53}$$

のように得られる．x が 0.77 といった適度な値を持つため，CP 非対称性の "薄まる" 因子 $\frac{x}{1+x^2}$ は 0.48 程度で幸い小さくないことが分かる．

x に関係しない CP 非対称性を表す因子を $a(f)\equiv \mathrm{Im}\left(\frac{q}{p}\frac{A(\bar{B}^0\to f)}{A(B^0\to f)}\right)$ のように書くことにする．既に述べたように $|\Delta B|=2$ の箱型ダイアグラムには t クォークが支配的な寄与をするので $\frac{q}{p}\simeq\sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}}$ は t クォークに関わる小林・益川行列要素を用いた $(V_{tb}^*V_{td})^2$ で表されることになる．このため，代表的な崩壊モードに関しては

$$a(\psi K_S)\simeq \mathrm{Im}\left(\frac{(V_{tb}^*V_{td})^2}{|V_{tb}^*V_{td}|^2}\right)=-\sin 2\phi_1 \tag{9.54}$$

のように，ユニタリー三角形（図 7.3 の (イ)）の 1 つの内角 ϕ_1 を用いて表される．ここで $\frac{V_{td}V_{tb}^*}{|V_{td}V_{tb}^*|}=e^{i(\pi-\phi_1)}$ を用いた．ウォルフェンシュタインのパラメターを用いるとオーダー 1 の ρ と η を用いて

$$a(\psi K_S)\simeq -\frac{2(1-\rho)\eta}{(1-\rho)^2+\eta^2} \tag{9.55}$$

と書けるので $|a(\psi K_S)|$ が 10% のオーダーになることが分かる．この**大きな CP 非対称性**は，既に **Belle** と **BaBar** の **B 工場実験**で検出されている：$|a(\psi K^0)|\simeq 67\%$（データでは K_S のみならず K_L の寄与も考慮されている）．

ところで (9.54) は re-phasing 不変でないように思える．即ち，$(V_{tb}^*V_{td})^2$ の位相は b クォークや d クォークの位相を変えると変わってしまう．しかし，実際には崩壊振幅に伴う位相因子，$\frac{A(\bar{B}^0\to\psi K_S)}{A(B^0\to\psi K_S)}\simeq\frac{(V_{cb}V_{cs}^*)q_K^*}{V_{cb}^*V_{cs}p_K^*}\simeq\frac{(V_{cb}V_{cs}^*)^2(V_{cs}V_{cd}^*)^2}{|V_{cb}V_{cs}^*|^2|V_{cs}V_{cd}^*|^2}$ も考慮すれば，全体としては re-phasing 不変性は保たれていることが分かる．ここで $V_{cb}^*V_{cs}$ の因子は，$\bar{b}\to\bar{c}c\bar{s}$ の崩壊振幅の寄与であり，$q_K^*/p_K^*\simeq(V_{cs}V_{cd}^*)/(V_{cs}^*V_{cd})$ は K_S に含まれる K^0 や $\bar{K}^0$ の割合が p_K および q_K であることから来ている．これらの因子も本来取り入れるべきではあるのだが，実際問題としては $V_{cb}V_{cs}^*$ はほとんど位相を持たず，また $q_K^*/p_K^*\simeq 1-2\bar{\epsilon}^*$ の CP 位相は，K のシステムにおける CP 非対称性が小さいことを反映して $|\bar{\epsilon}|=\mathcal{O}(10^{-3})$ で抑制されるため，$\frac{V_{tb}^*V_{td}}{|V_{tb}^*V_{td}|}$ の位相により CP 非対称性がほぼ決まってしまうことになるのである．

ここまで初期状態の B 中間子のフレーバーが B^0 か $\bar{B}^0$ かで確定しているものとして議論をしてきた．CP 非対称性は $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ の交換の下で符号を変えるので，このような同定は非常に重要となる．しかしながら，そうした同定はBelle や BaBar 等の B 工場実験での電子・陽電子衝突実験の場合には容易ではない．それは，B^0 と $\bar{B}^0$ が常にペアで生成され，またそれらは $B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 振動により互いに混ざり合うからである．この問題を解決する方法は 2 つの中間子のうちの 1 つを例えば $\bar{B}^0$ であると“タグ付け”することである．このタグ付けは，例えば $\bar{B}^0$ からしか崩壊できないような崩壊モードを選び，その崩壊を観測することで実現できる．ここで重要なことは，タグ付けのための崩壊が起きた時刻において，残りのもう 1 つの中間子は B^0 であると同定できることである（$\bar{B}^0$ とタグ付けされた場合）．それは，B 工場実験では $e^+e^- \to \Upsilon(4S) \to B^0\bar{B}^0$ により 2 つの B 中間子が生成されるため，角運動量保存より 2 つの中間子の相対的な軌道角運動量は 1（“p” 波）の状態にあるからである．p-波の波動関数は 2 つの中間子の入れ替えの下で符号を変える．よって，もしも同じ時刻に 2 つの中間子が同じフレーバーを持ったとすると，スピンが 0 の B 中間子の満たすべきボース統計と矛盾してしまうことになる．

こうして，タグ付けをされた時刻があたかも理想化された状況における $t = 0$ に当たるものと考えれば，今まで導いた式をそのまま用いることができることになる．つまり，1 つの中間子をタグ付けしてから別の中間子が終状態 f に崩壊するまでの時刻を (9.51) の t だと見なせば良いということである．ただ，一つ注意すべきなのは実際の実験ではタグ付けより実際に観測したい崩壊のほうが先に起きることがあり得るという点である．この場合，いわば t が負になるが，(9.51) は t の奇関数なので，そのままだと CP 非対称性が消えてしまうことになる．これは，t の符号を変えることは T 反転に対応するが，CPT 定理より T 反転は CP 反転と同等，と考えると直感的に理解できる．

そこで必要になるのが，タグ付けするための崩壊と実際に観測したい崩壊の時間差を特定することである．そのため，実際の B 工場実験においては，異なるエネルギーで電子と陽電子を衝突させる“**非対称的衝突加速器 (asymmetric collider)**”を用いて実験をしている．こうすることで系の重心が運動し，タグ付けと崩壊の時刻を，衝突点からの距離を測定することで決めることができるのである．

第 10 章
消えた反物質の謎

ここまで**素粒子**の世界での**CP 対称性の破れ**に関して議論をしてきた．実は，素粒子という最もミクロの世界での CP 対称性の破れが，**宇宙**という最もマクロの世界での**物質の起源**を説明する上で決定的に重要な役割を演じるのである．この章では，この話題に関して，基本的なアイデアの紹介を行いたい．なお，この章の内容に関する包括的な教科書としては，例えば文献 [11], [12] が挙げられる．本書もこれらを参考にしている．

宇宙が誕生以来どのように時間発展し，また今後どのような運命をたどるかは，一般相対論に基づいて構築された**ビッグバン (Big-Bang) 宇宙論**と呼ばれる理論で記述される．ビッグバン宇宙論によると誕生したばかりの初期宇宙は非常に小さな領域にすべての物質とエネルギーが凝縮された非常に高温・高密度の世界であったと考えられている．また，電磁波のような質量ゼロの粒子による輻射のエネルギーが質量を持つ物質のエネルギーに比べて支配的であったと考えられている．あるいは，最新の**インフレーション宇宙論**によれば，誕生時点での物質密度に関する初期条件がどうであれインフレーション（急激な宇宙の膨張）の結果，物質のエネルギー密度は急激に薄まると思われている．その後真空のエネルギーがゼロとなってインフレーションが終了した段階で，それまで蓄えられていた真空のエネルギーが解放されて宇宙の "**再加熱**" が起き，ビッグバンがスタートすると**輻射優勢**の状態が実現すると思われている．

こうした輻射優勢の状況では，2 個の光子の対消滅によって，例えば

$$\gamma + \gamma \quad \rightarrow \quad e^- + e^+ \tag{10.1}$$

といったように，粒子と反粒子が常にペアで生成され（図 10.1 参照），したがって，インフレーションの結果として物質密度が（あったとしてもほとんど）ゼロの状態でビッグバンを開始した宇宙においては**物質と反物質は等量存在**していたはずである．しかしながら，現在の宇宙には反物質が存在する兆候はいっさい見つかっていない．地球の大気中には例えば μ^+ といった反粒子が存在す

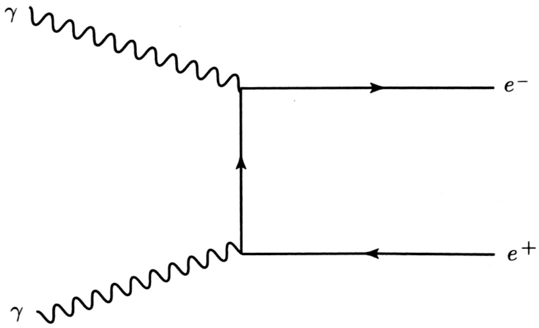


図 10.1　光子消滅による粒子・反粒子の対生成.

るが，これは宇宙線が大気にぶつかって生成された 2 次的な粒子であり宇宙に反物質があることを示している訳ではない．また，仮に反物質が宇宙に存在したとしても，それらが粒子と出会うと粒子との**対消滅**を起こし，物質も存在できなくなってしまう．このように，なぜ反物質のみが消え，我々の世界を構成している物質のみが残ったのかという「**消えた反物質の謎**」と呼ばれる重大なパズルが宇宙論にはあるのである．この謎は，要するに最初に等量存在していた粒子・反粒子のバランスがどのようにその後壊れたのかということであるので，C 対称性や CP 対称性の破れが必要であることは容易に想像がつくが，これだけでは十分ではないことが次の節で議論される．

物質と反物質の非対称性を表す量としてよく議論される物理量は，**バリオン数密度**（単位体積当たりのバリオン数）n_B の**エントロピー密度** s に対する比である．この量は，バリオン数生成や，(再加熱といった) エントロピー生成が無い限り，宇宙の断熱膨張の下で不変である．宇宙初期の水素，ヘリウム等の軽元素合成の理論と現在の観測値，また宇宙背景放射のデータから

$$\frac{n_B}{\left(\frac{s}{k}\right)} = (0.67 - 0.92) \times 10^{-10} \tag{10.2}$$

であることが分かっている．k はボルツマン定数．ここで，**バリオン数** $\boldsymbol{B}$ とは，バリオンとその反粒子（反バリオン）のみが 1 と -1 を持ち，他のメソンやレプトンは 0 という値を持つような量子数である．バリオンを構成する 3 つのクォークの各々は $B = \frac{1}{3}$ を，反クォークは $B = -\frac{1}{3}$ を持つ．また，同様にレプトン数も定義できて，電子やニュートリノといったレプトンやその反粒子が $L = 1, -1$ を，それ以外は $L = 0$ を持つ．現在の宇宙において物質が残っているということは，現在の宇宙では B は 0 でない正の値を持っているということを言っている．(10.2) はバリオンと反バリオンのバランスがほんの少しだけ崩れていて，バリオンと反バリオンの対消滅の後に現在の宇宙にバリオンのみがほんのわずか残ったことを示している．

誕生した直後の宇宙においては物質・反物質が等量存在していて，したがっ

てその時点では宇宙のバリオン数の総和 $B=0$ であったはずなのに，何故現在の宇宙では正の B が実現しているのか（これを**バリオン数生成**とも言う），というのが“消えた反物質の謎”である．

10.1 サハロフの3条件

サハロフは，物質・反物質が等量存在するという初期条件の下で，現在の宇宙に物質のみが残るために満たされるべき条件として，以下のような3つの条件を与えた．これらの条件は「**サハロフの3条件**」と呼ばれている．即ち，

- **バリオン数を破る相互作用の存在．**
- **C および CP 対称性の破れ．**
- **熱平衡からのずれ．**

まず，1番目の「バリオン数を破る相互作用の存在」について考えよう．物質が最終的に宇宙に残ったということは，クォークとレプトンが，それらの反粒子との対消滅の後に生き残ったことを意味する．つまり，現在の宇宙では，クォークが担うバリオン数とレプトンの担うレプトン数が正の値として存在している，ということである．特にバリオン数に注目すると，宇宙初期にはクォークと反クォークは調和していてバリオン数の総和はゼロであったはずなので，もしも素粒子の相互作用がバリオン数を保存するものばかりだとすると，バリオン数は現在でもゼロであるはずであり矛盾が生じる．よってバリオン数（の保存）を破る相互作用の存在が必要条件となる．

次に，C および CP 対称性の破れに関して考えよう．仮に1番目の条件が満たされてバリオン数ゼロの状態からバリオン数を破る相互作用によって，例えば正のバリオンが生成されたとしよう．しかし，仮に C 対称性があるとすると，粒子と反粒子は全く対称的なので，この反応に参加するすべての粒子をすべて C 変換して得られる素粒子反応も全く同じ確率で起こるはずである．変換後の素粒子反応では元の反応に比べて生成されるバリオン数はちょうど逆符号であるので，結局正味のバリオン数は相変わらずゼロのままでありバリオン数生成はできない．一方で実際には C 対称性は弱い相互作用において最大限に破れているので，バリオン数の生成は可能であるように一見思われる．しかし，C 対称性が破れていても仮に CP 対称性が存在すると，クォークとそれとはカイラリティー（スピンの向き）が逆の反クォークが同等になり，やはり正味のバリオン数は生成できないことになってしまう．こうして，CP 対称性の破れがバリオン数生成のための必要条件となり，**CP 対称性の破れ**は素粒子の世界で重要であるばかりでなく，そもそも**宇宙に我々が存在できるための必要条件**にもなっていることが分かる．

最後の条件である熱平衡からのずれについてである．1番目の条件を満たす

バリオン数を破る素粒子反応によってバリオン数が生成されたとしても，宇宙初期の高温の状態下で熱平衡が実現していると，その逆反応も同じ頻度で起きてせっかく生まれたバリオン数が消滅してしまうであろう．仮に宇宙が定常的で膨張しないとすると，誕生直後に非常な高温で熱平衡状態にあった様々な素粒子反応は，そのまま熱平衡状態を保つであろう．つまり熱平衡からのずれが生じ得る本質的要因は宇宙の断熱膨張にあるのである．したがって，バリオン数を破る素粒子反応の“速さ”に比べて宇宙の膨張があまりにゆっくりであれば熱平衡のずれは起きないであろうから，熱平衡からずれるかどうかは両者の大小関係によって決まることになる．

10.2 簡単な設定による解析

サハロフの 3 条件，特に最初の 2 つの条件の必要性を確かめるために必要最小限の要素を持つ簡単な理論を設定し解析してみよう．

この理論には重いボソン（スピンは特定しないが 1 か 0 を想定）X があり，2 つの異なる終状態 f_1, f_2 に崩壊可能であるとする．それぞれの終状態への崩壊の分岐比を r_1, r_2 とする．また，X の反粒子 $\bar{X}$ の f_1, f_2 を CP 変換した状態 $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ への崩壊の分岐比を $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ とする．ただし当然

$$r_1 + r_2 = 1, \qquad \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 1 \tag{10.3}$$

を満たす．また終状態 f_1, f_2 は，それぞれバリオン数 B_1, B_2 を，したがって $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ はそれぞれ $-B_1$, $-B_2$ を持つものとする．

ここで X にバリオン数を付与できるかどうか考えてみよう．仮に X の崩壊モードが $X \to f_1$ のみだとする．この場合，X はクォークのように本来バリオン数を持つ粒子ではないが，X にもバリオン数 B_1 を付与すると相互作用はバリオン数を保存することになる．つまり，バリオン数生成のためには少なくとも 2 つ以上の崩壊モードの存在が必要条件になる．また，この模型の例のように 2 つの崩壊モードが存在したとしても $B_1 = B_2$ であると，再びこの共通のバリオン数を X に付与することができてバリオン数は破れない．つまり，物理的にバリオン数の非保存が起きるのは，2 つの崩壊モード f_1, f_2 のバリオン数が異なる場合であると言える．

宇宙初期には図 10.1 と同様な過程によって X, $\bar{X}$ が対生成されたはずである．サハロフの 3 番目の条件である熱平衡からのずれが実現して，一対の X と $\bar{X}$ が崩壊し，仮にその逆反応が全く起こらなかったとすると，この崩壊の結果次のバリオン数が生成されることになる：

$$\epsilon \equiv r_1 B_1 + r_2 B_2 + \bar{r}_1(-B_1) + \bar{r}_2(-B_2) = (r_1 - \bar{r}_1)(B_1 - B_2). \tag{10.4}$$

ここで (10.3) の関係を用いた．(10.4) の結果はサハロフの最初の 2 つの条件

の必要性を端的に示していると言える．まず，この式は B_1, B_2 が 0 であると消えるが，これはバリオン数を破る相互作用が無いと，バリオン数の生成ができないことを言っている．また，この式は $r_1 - \bar{r}_1$ に比例しており，CP 対称性があり $r_1 = \bar{r}_1$ だとバリオン数が生成されないことを言っている．なお (10.4) が $B_1 - B_2$ に比例している事実は上で議論したことを反映していて，$B_1 = B_2$ であると $X, \bar{X}$ にバリオン数を一意的に付与できるので，実際にはバリオン数の破れは起きないことを言っているのである．

$X, \bar{X}$ の崩壊によりバリオン数が生成されるので，(10.2) のバリオン数密度とエントロピー密度の比 kn_B/s は (10.4) の ϵ に比例するはずであるが，比例定数は何で決まるであろうか？　サハロフの 3 番目の条件から分かるように，バリオン数を破る $X, \bar{X}$ の崩壊があっても，熱平衡からずれなければ n_B は 0 になるはずである．よって比例定数は，熱平衡からのずれを表すものに比例しているはずである．熱平衡からのずれが起こるとすると，そのずれが生じ始めるのは温度 T が X の質量 M_X と同程度になったときであると言える．$T \gg M_X$ では X の質量は無視できて他の軽い粒子と熱平衡にあったはずであり，逆に $T \ll M_X$ まで下がるとボルツマン因子 $\exp(-M_X/kT)$ が効いてきて崩壊の逆反応による $X, \bar{X}$ の生成は難しくなる．こうして，熱平衡からのずれが実現するかどうかは，X の崩壊の "速さ" を表す**崩壊幅 $\boldsymbol{\Gamma}$** と宇宙膨張の "速さ" を示す**ハッブル定数 $\boldsymbol{H}$** の比で決まり，膨張が速ければ熱平衡からずれるはずなので，ずれるための条件は

$$\left.\frac{\Gamma}{H}\right|_{T=M_X} \leq 1 \tag{10.5}$$

であると言える．こうして，kn_B/s と ϵ の関係は

$$\frac{kn_B}{s} \sim \frac{1}{g_*} f(K) \times \epsilon \tag{10.6}$$

となる[12]．ここで $f(K)$ は $K \equiv \frac{\Gamma}{2H}|_{T=M_X}$ の関数で $K = 0$ では 1, K が大きくなると 0 に近づく関数である．K が大きいと熱平衡は保たれるので，この結果はサハロフの 3 番目の条件の必要性を確かに表している．また，g_* は 100 のオーダーの数で，$T \sim M_X$ の温度（エネルギー）における軽くて相対論的な素粒子の自由度を表している．熱平衡から大きくずれた場合である $K = 0$ を考え，また g_* を 10^2 から 10^3 とすると，(10.2), (10.6) より

$$\epsilon \sim 10^{-8} \text{ から } 10^{-7} \tag{10.7}$$

となる．熱平衡からのずれがそれほど大きくないときには，ϵ はもっと大きくなる必要がある．

この節の最後に，X と $\bar{X}$ の部分崩壊幅の差，即ち $r_1 \neq \bar{r}_1$ を実現するには，CP 対称性の破れの他に実はもう一つ条件が必要であることを述べておこう．簡単のために $X \to f_1$ の崩壊において，2 つのファインマン図が寄与し，その結

果崩壊振幅が

$$A(X \to f_1) = c_1 A_1 + c_2 A_2 \tag{10.8}$$

と書かれたとしよう．ここで，$c_{1,2}$ はそれぞれのファインマン図の相互作用頂点からの寄与で，一般に複素数の結合定数を含み CP 変換の下でそれらの複素共役に変換される．これに対してそれ以外の部分である $A_{1,2}$ は粒子が不安定で崩壊可能であることを反映したファインマン図の“吸収項”の寄与により一般に複素数であるが，CP 変換の下では不変で複素共役にはならないことに注意しよう．すると部分崩壊幅の CP 非対称性は

$$\begin{aligned}\Gamma(X \to f_1) - \Gamma(\bar{X} \to \bar{f}_1) &\propto |A(X \to f_1)|^2 - |A(\bar{X} \to \bar{f}_1)|^2 \\ = |c_1 A_1 + c_2 A_2|^2 - |c_1^* A_1 + c_2^* A_2|^2 \\ = -4\,\mathrm{Im}(c_1^* c_2)\,\mathrm{Im}(A_1^* A_2)\end{aligned} \tag{10.9}$$

で与えられることが分かる．この結果は，CP 非対称性が物理量として現れるためには $\mathrm{Im}(c_1^* c_2)$ に寄与する **CP 位相**の存在が必要であるが，これだけでは十分ではなく $\mathrm{Im}(A_1^* A_2)$ に現れるような**ファインマン図の吸収項の存在**が不可欠であることを示している．(10.9) から分かる重要なことは，崩壊幅に CP 非対称性が現れるためには少なくとも 2 つ以上のファインマン図が崩壊に寄与し，異なるダイアグラム間の干渉効果が存在することが必要であるということである．更に $A_{1,2}$ に吸収項が寄与することが不可欠になるが，吸収項は tree ダイアグラムでは存在しないので量子補正が重要になることも分かる．一番簡単な可能性としては，tree ダイアグラムと 1 ループダイアグラムの間の干渉効果が考えられる．

10.3 典型的なシナリオとしての大統一理論

前の節で議論した設定を実現する典型的なものとして**大統一理論 (Grand Unified Theory, GUT)** を用いたバリオン数生成がある．これは，吉村太彦らが初めて素粒子の模型を**バリオン数生成のシナリオ**として用いたものとして有名である [13]．

標準模型ではなく大統一理論が注目された理由は，標準模型では（少なくとも後で議論する量子異常の効果を無視すれば）バリオン数は保存されるのに対して，大統一理論ではバリオン数を破るゲージボソン，ヒッグスによる相互作用が存在し，したがってサハロフの最初の条件が満たされるからである．この**バリオン数を破る相互作用**は正に大統一理論特有の予言である**陽子の崩壊**を引き起こす相互作用でもある．標準模型ではクォークとレプトンは異なるゲージ群の既約表現に属し，したがってクォークとレプトンがゲージ相互作用やヒッグス相互作用によって混ざることはない．このためバリオン数 B，レプトン数

L は様々な相互作用において保存される．よって標準模型においてはバリオン数を持つ粒子，即ちバリオンのうちで一番軽い陽子はバリオン数の保存則のために崩壊することができない．何故ならば陽子より軽い粒子はバリオン数を持たないからである．もちろん，仮に陽子が崩壊してしまったら原子は存在できなくなり困ったことになるので，これは望ましい性質であると言える．

これに対して大統一理論においてはクォークのみが持つ強い相互作用とレプトンが持つ弱い相互作用，電磁相互作用が大統一されるのに伴い，物質の方でも統一が起こり，クォークとレプトンが同じ規約表現の中に含まれることになる．例えば，一番簡単な大統一理論である $SU(5)$ ゲージ対称性を持つ **$SU(5)$ 大統一理論**では，1 世代分の物質（クォークとレプトン）は $SU(5)$ の **5^* 表現**（基本表現である 5 次元表現の複素共役をとった表現）Ψ，および **10 次元表現**（2 階の反対称テンソル表現）χ に納められる：

$$\Psi = \begin{pmatrix} (d^1)^c \\ (d^2)^c \\ (d^3)^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \tag{10.10}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & (u^3)^c & -(u^2)^c & -u^1 & -d^1 \\ -(u^3)^c & 0 & (u^1)^c & -u^2 & -d^2 \\ (u^2)^c & -(u^1)^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

ここで d^i, u^i $(i = 1, 2, 3)$ の添字 i は 3 色のカラーを表す．例えば Ψ においては 3 色の右巻きの d クォークの反粒子とレプトンの 2 重項が同じ多重項の中に含まれており，したがってこれらを結ぶような“非対角”生成子を伴うゲージボソンであるカラーを持ち，$SU(2)$ 2 重項をなすゲージボソン (X^i_μ, Y^i_μ) $(i = 1, 2, 3)$ の交換による相互作用は，バリオン数 B（およびレプトン数 L）を変える相互作用になる．しかし，この Ψ との相互作用のみでバリオン数が破れると結論づけるのは早計である．X ゲージボソン交換による図 10.2(a) の相互作用においては，各相互作用頂点においては確かにバリオン数が $\pm\frac{1}{3}$ 変化しているが，2 つの頂点における相互作用は互いにエルミート共役の関係にある相互作用項の寄与なので，頂点におけるバリオン数の変化 ΔB は互いに逆符号になり，したがって全体としては $\Delta B = 0$ である．少し見方を変えると，X ゲージボソンに $B = -\frac{1}{3}$, $L = -1$ というバリオン数，レプトン数を付与すれば相互作用頂点において B, L はいずれも保存することになる．一方，X は当然ながら 10 次元表現 χ のクォーク，レプトンにもゲージ相互作用によって結合する．こちらの相互作用頂点において B, L の保存則を課すと，今度は $B = \frac{2}{3}$, $L = 0$ を X に

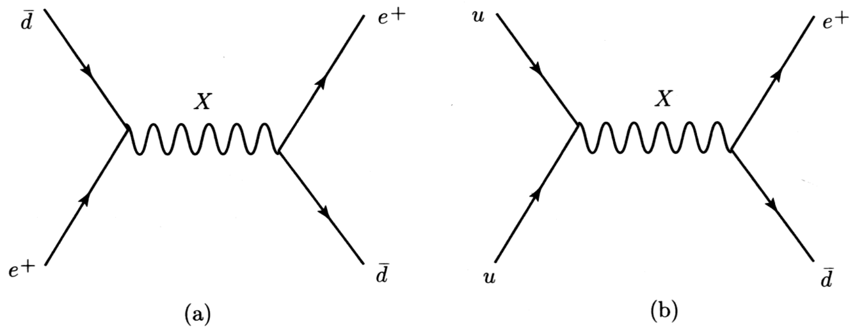


図 10.2　X ゲージボソン交換による相互作用.

付与すれば良いことが分かるが，これは先に与えた $B=-\frac{1}{3}$, $L=-1$ と矛盾する．即ち，B, L の破れが生じるためには，X ゲージボソンが 2 つの異なった既約表現に同時に結合するということが本質的に必要である（Y についても同様）．実際，図 10.2(b) のファインマン図では，2 つの相互作用頂点は 5^* と 10 の 2 つの異なる表現のフェルミオンと X との相互作用によりそれぞれ生じるが，ここでは全体として $\Delta B=-1$, $\Delta L=-1$ となり，確かに**バリオン数の破れ**が起きていることが分かる．なお，この議論からも分かるように，$SU(5)$ GUT においては，B, L のいずれも破れるが **$B-L$ は保存**されることが分かる．即ち $\Delta(B-L)=\Delta B-\Delta L=0$ が言える．これは $SU(5)$ のような GUT の特徴である．

見方を変えると，上の議論から例えば X ボソンは $B_1=\frac{2}{3}$ と $B_2=-\frac{1}{3}$ という異なるバリオン数を持つ 2 つの終状態への崩壊が可能である：

$$X \quad \to \quad u+u, \qquad X \quad \to \quad \bar{d}+e^+. \tag{10.12}$$

ここで $B_{1,2}\neq 0$，また $B_1\neq B_2$ であるので，サハロフの最初の条件である「バリオン数を破る相互作用の存在」の条件を満たしていることになる．

なお，図 10.2(b) の X 交換による相互作用において典型的に見られるように，GUT ではバリオン数保存が破れるために陽子は崩壊することになってしまう．実際，図 10.2(b) の素過程により

$$p \quad \to \quad \pi^0+e^+ \tag{10.13}$$

という崩壊が可能であることがすぐ分かる．これは非常に興味深い GUT 特有の予言であり，実際**カミオカンデ (Kamiokande) 実験**が計画された主たる理由はこの**陽子崩壊を検証**することであった．しかし，一方でこれは原子が不安定になることも意味し，その相互作用が原子の安定性を保証する程度に小さくなれるかは大きな問題になるが，幸い陽子崩壊が頻繁に起こることは無い．それは，大統一という重力以外の 3 つの素粒子の相互作用の統一が実現するのが非常な高エネルギー（あるいは大きな質量）スケールであるためである．今考えて

いる（超対称性を持たない）$SU(5)$ 理論の場合では，大統一スケール（M_{GUT} と呼ばれる）は 10^{15} GeV 程度の質量スケールになる．現在実験可能なエネルギースケールにおいては，強い相互作用は呼び名のとおり電弱相互作用に比べて強い．つまり強い相互作用のゲージ結合定数は電弱相互作用のそれに比べてずっと大きいのである．一方で，大統一が実現するということはこれらの結合定数が単一の結合定数に統一されることを意味する．実際 $SU(5)$ 理論は（群が**単純群**であるために）標準模型の場合と違って唯一のゲージ結合定数 g_5 を持つ．すると一見大統一などできそうもないと思えるが，これが実現する理由はゲージ結合定数のエネルギー依存性にある．理論が与えられたときにラグランジアンに最初に入っているパラメターであるゲージ結合定数や質量などは，(相互作用が局所的であるために）その理論を適用することのできる最もミクロな世界，したがって不確定性関係より最も高いエネルギースケール（理論のカットオフと呼ばれる）で与えられているものと理解できる．しかし，エネルギーが下がるにつれて，例えば電荷のようなゲージ結合定数の大きさは量子効果（ループダイアグラム）による補正によって実質的に変化する．QED のような可換ゲージ理論においては一般にゲージ結合定数はエネルギーが下がると減少する．しかし，意外なことに，$SU(2)$ や $SU(3)$ といった非可換ゲージ理論ではエネルギーが下がると結合定数は大きくなることが知られている．逆にこれはエネルギーが上がると強い力も弱くなるということを意味する：“**漸近自由性 (asymmptotic freedom)**”．なお $SU(2)$ が直感的には $SU(3)$ に比べて群の次元（“大きさ”）が小さいので $(\frac{3}{8})$，こうしたエネルギー変化は $SU(3)$ ほどは大きくない．また，いずれの群においても，ゲージ結合定数のエネルギー依存性は対数による依存でありエネルギーによる変化はゆっくりしている．こうしたゲージ結合定数のエネルギー依存性を記述するのが “**繰り込み群 (renormalization group) 方程式**” と呼ばれるものである．

以上をまとめると次のようになる．大統一スケール M_{GUT} を超えるような十分高エネルギーの領域では $SU(5)$ の大統一ゲージ対称性が自発的に破られずに存在し，したがって強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用の 3 つのゲージ結合定数はすべて $SU(5)$ の結合定数 g_5 に（漸近的に）一致している．しかし実際には $SU(5)$ 対称性は，少なくとも我々が実験的に探ることのできている弱スケール $M_W \sim 10^2$ GeV までを（ほぼ）完璧に記述する標準模型のゲージ対称性 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に大統一スケール M_{GUT} で自発的に破れる必要がある：$SU(5) \to SU(3) \times SU(2) \times U(1)$．この破れにおいて群のランク（位数）は 4 のままで小さくならないので，この自発的破れは $SU(5)$ の随伴表現である 24 次元表現のヒッグス Σ の真空期待値 $\langle \Sigma \rangle \sim M_{GUT}$ によって引き起こされる．よって，M_{GUT} よりエネルギーが下がるともはや $SU(5)$ 対称性は無くなり標準模型の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 対称性のみが存在する．したがって 3 つの相互作用の結合定数は異なるエネルギー依存性を持ち，エネルギーが

下がるに従い 3 つの結合定数の差が大きくなっていく．こうして M_W くらいでは強い相互作用は弱い相互作用に比べて文字どおり強くなるのである．しかし，上記のように結合定数のエネルギーによる変化はゆっくりなので，強弱の相互作用の結合定数の差を出すには M_W は M_{GUT} よりかなり小さい必要があり，逆に言えば M_{GUT} は M_W に比べてかなり大きくなる．繰り込み群方程式に基づいて計算すると $M_{GUT} \sim 10^{15}$ GeV となり弱スケールに比べて 13 桁も大きいことになる．なお，一番簡単な $SU(5)$ 大統一理論は既に M_W スケールで精密測定された 3 つの相互作用の結合定数 g_3, g_2, g_1 を高エネルギーまで変化させたときに完全には一致せずわずかにずれること，また理論が予言する頻度で陽子崩壊が起きないことがカミオカンデ実験で明らかになったこと，によって排除されてはいる．しかし GUT のひな形として，その本質的性質をここで議論するには十分であろう．

さて，陽子崩壊を引き起こす $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ **ゲージボソン**についての話に戻すと，これらのゲージ粒子は標準模型では存在しないので，その質量 $M_{X,Y}$ は $\langle \Sigma \rangle \sim M_{GUT}$ 程度になり，それ以下のエネルギースケールではその効果が強く抑制されることになる．よって，例えば X ゲージボソンの交換による図 10.2(b) から生じる実効的 4 フェルミ相互作用のウィルソン係数は $\frac{g_5^2}{M_X^2}$ のオーダーになり，バリオン数を破る相互作用の効果は，大きな M_{GUT} の逆ベキで強く抑制される (“**decoupling**”)．このため陽子崩壊は極めて稀にしか起きないことになり陽子の寿命は 10^{30} 年程度になり，陽子はほとんど安定な粒子と見なせる．

次にサハロフの 2 番目の条件に関してであるが，大統一理論が CP 対称性の破れを持っていることは明らかである．それは大統一理論は標準模型を含む理論なので（実際 $SU(5)$ は部分群として $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を含む），**小林・益川模型の CP 位相**を当然含むからである．ただし，正確には大統一理論のほうが，フェルミオンが 2 つの規約表現に集約されているために制約が強いので，標準模型では物理的に残らなかった CP 位相が $SU(5)$ 大統一理論では re-phasing を受けずに物理的に残ることも可能である．

3 番目の条件である熱平衡からのずれに関してであるが，前節の一般的な議論で述べた熱平衡からずれるという条件 (10.5) は，X ボソンの崩壊（Y についても同様）に関しては崩壊幅が $\Gamma \sim \alpha M_X$ $(\alpha = \frac{g_5^2}{4\pi})$ であり，またハッブル“定数” が $T = M_X$ では $H \simeq \sqrt{g_*}\frac{T^2}{M_{pl}} = \sqrt{g_*}\frac{M_X^2}{M_{pl}}$ ($\boldsymbol{M_{pl}}$: **プランク質量**) で与えられることから

$$M_X \geq \frac{\alpha}{\sqrt{g_*}} M_{pl} \simeq \alpha \times 7 \times 10^{17} \ (\mathrm{GeV}) \tag{10.14}$$

という M_X に関する下限になる．α が 100 分の 1 程度だと思えば，$M_{GUT} \sim 10^{15}$ (GeV) なのでこの条件は満たし得るものである．

こうして，$SU(5)$ GUT においては X, Y ゲージボソンによるバリオン数を破る相互作用がサハロフの 3 条件を満たすように思えるが，実際には，これら

のゲージ相互作用のみで観測されている宇宙のバリオン数を再現することは難しいと思われている．それは，CP 対称性を破る位相が理論に存在するとは言っても X, Y によるゲージ相互作用そのものは CP 対称性を破らないことに遠因があると言える．つまり，純粋に X, Y のみが関与する相互作用においては，CP 位相はこれらの崩壊で生じる軽いフェルミオンが複素数の湯川結合を通してヒッグスの真空期待値を得る際に現れ得るが，この真空期待値は M_W のオーダーで M_{GUT} に比べると非常に小さい．M_X を大きくして熱平衡からのずれを大きくすれば良さそうであるが，M_X は M_{GUT} 程度で固定されるので自由に大きくすることはできない．

こうした理由から，$SU(5)$ 大統一理論ではバリオン数を破り，陽子崩壊にも寄与するもう一つの相互作用である，カラーを持ったヒッグス（“colored Higgs”）の崩壊過程を用いてバリオン数生成をすることが考えられている．ヒッグスの湯川結合は小林・益川理論におけるように一般に複素数であり，湯川結合は無次元量なので M_{GUT} といった高いエネルギー・スケールでもその効果が消えることはない．

まず，カラーを持った**ヒッグス**についてであるが，標準模型ではヒッグスは $SU(2)$ の基本表現である 2 重項 (doublet) に属するが，$SU(5)$ GUT でも標準模型のヒッグスに相当するスカラー場は基本表現である **5 次元表現**として以下のように導入される：

$$H = \begin{pmatrix} H_c^1 \\ H_c^2 \\ H_c^3 \\ \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{10.15}$$

ここで下側の $(\phi^+,\ \phi^0)$ のペアは標準模型の 2 重項に対応するが，5 次元表現に拡張されたために $H_c^i\,(i = 1, 2, 3)$ というカラーを持ったヒッグスも現れる．このカラーを持ったヒッグスは X, Y 同様に標準模型では現れず，また陽子崩壊を引き起こすので M_{GUT} 程度の質量を持つ必要があるが，その質量はやはり $\langle \Sigma \rangle \sim M_{GUT}$ によって供給される．このヒッグスは次のようなバリオン数を破る 2 つの “チャンネル” への崩壊が可能である：

$$H_c \quad \rightarrow \quad d + \nu_e, \quad \bar{u} + \bar{d}. \tag{10.16}$$

2 つのチャンネルのバリオン数は $\frac{1}{3}$ および $-\frac{2}{3}$ で異なるので，X の崩壊のときと同様にこのヒッグスの崩壊によりバリオン数の破れが生じることが容易に分かる．

しかしながら，これだけでは十分ではない．即ち，サハロフの 2 番目の条件に関連して，5 次元表現のヒッグスが必要最小限の 1 個だけであるとすると，

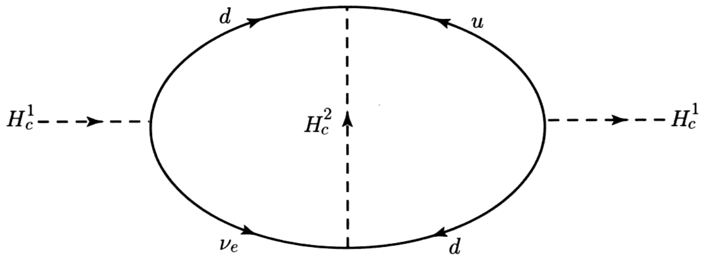


図 10.3 カラーを持つヒッグスの崩壊によるバリオン数生成.

以下で見るように CP 非対称性を引き起こす CP 位相が相殺してしまい崩壊において CP 対称性の破れが生じないのである．よって，複数個の 5 次元表現のヒッグスが必要とされるが，ここでは簡単のために 2 個，H^1, H^2 が導入される場合を考える．これらのヒッグスのフェルミオンとの湯川結合は次のように与えられる：

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\sum_{i=1,2}\left(h^{(i)}_{\alpha\beta}\,\chi_\alpha\,\chi_\beta\,H^i+f^{(i)}_{\alpha\beta}\,\Psi_\alpha\,\chi_\beta(H^i)^*\right). \tag{10.17}$$

ここで α,β は世代の添字であり，$h^{(i)}_{\alpha\beta}, f^{(i)}_{\alpha\beta}$ は 2 個のヒッグスの湯川結合定数を表す．この模型では (10.4) で定義される ϵ は，カラーを持ったヒッグスの崩壊を表す tree ダイアグラムと 1-loop ダイアグラムの干渉効果で生じるが，それは図 10.3 に示した 2-loop ダイアグラムの吸収項によって，つまりダイアグラムのフェルミオンの線を “カット” して得られる.（具体的にはループ積分をする際に，中間状態に現れるフェルミオンが on-shell になることで生じる $\log(-1)$ に比例する虚数部分を計算すればよい.）

図 10.3 より，H^1 の崩壊に関して

$$\begin{aligned}\epsilon^{(1)}=&\frac{1}{8\pi[\mathrm{Tr}(h^{(1)\dagger}h^{(1)})+\mathrm{Tr}(f^{(1)\dagger}f^{(1)})]}\\&\times\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\left(f^{(1)\dagger}f^{(2)}h^{(1)\dagger}h^{(2)}\right)[F(x)+G(x)]\end{aligned} \tag{10.18}$$

となる [12]．ここで $x\equiv M^2_{H_c^{(2)}}/M^2_{H_c^{(1)}}$ であり，またループ運動量の積分を計算して得られる関数は

$$F(x)\simeq 1-x\log\left(\frac{1+x}{x}\right),\qquad G(x)=\frac{1}{x-1} \tag{10.19}$$

で与えられる．この結果から，仮にヒッグスが 1 種類のみであるとし $f^{(1)}=f^{(2)}$, $h^{(1)}=h^{(2)}$ であるとすると，$\mathrm{ImTr}(f^{(1)\dagger}f^{(1)}h^{(1)\dagger}h^{(1)})=0$ となり，CP 対称性の破れの効果は消えてしまうことが分かる．これが，ヒッグスが複数個必要な理由である．(10.18) は，H^1 の崩壊に関してであったが，図 10.3 において H^1 と H^2 の役目を入れ換えて H^2 の崩壊を考えると，$\mathrm{Tr}(f^{(1)\dagger}f^{(2)}h^{(1)\dagger}h^{(2)})^\dagger=\mathrm{Tr}(f^{(2)\dagger}f^{(1)}h^{(2)\dagger}h^{(1)})$ より，CP 非対称性は逆符号になることが分かる．こう

して両方の崩壊の寄与を足すと

$$\epsilon \simeq \frac{1}{8\pi}\eta \times 10^{-2}\left[F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) + G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)\right] \tag{10.20}$$

が得られる．ここで

$$\eta = \frac{\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}(f^{(1)\dagger}f^{(2)}h^{(1)\dagger}h^{(2)})}{|\mathrm{Tr}(f^{(1)\dagger}f^{(2)}h^{(1)\dagger}h^{(2)})|} \tag{10.21}$$

は CP 非対称性の度合いを表す．また $|f^i_{33}| \simeq 0.1$, $|h^i_{33}| \simeq 1$ とした．(10.6) のように $\frac{kn_B}{s}$ は (10.20) の ϵ に比例するが，ボルツマン (Boltzmann) 方程式を用いた解析によると，その関係は以下で与えられる（文献 [14] を参照）:

$$\frac{kn_B}{s} = 0.5 \times 10^{-2} \times \frac{\epsilon}{1+(3K)^{1.2}} \simeq -2 \times 10^{-9}\eta. \tag{10.22}$$

ここで $x = 0.5$ と置いた．また熱平衡からのずれの度合いを表す K は

$$K = \left.\frac{\Gamma}{2H}\right|_{T=M_{H_c}} \simeq 3.5 \times 10^{17}\alpha_H \frac{1}{M_{H_c}}\left(\frac{53}{g_*}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \mathrm{GeV} \tag{10.23}$$

であり，(10.22) においては，$\alpha_H \equiv \frac{h^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{4\pi}$, $g_* = 53$, $M_{H_c} = 10^{14}$ GeV とした．(10.2) の観測値を再現するためには

$$\eta \simeq -(0.03 - 0.05) \tag{10.24}$$

であれば良いことになる．

このように大統一理論に基づくバリオン数生成の機構は素粒子理論に基づいて宇宙のバリオン数をうまく説明できているように思える．しかしながら，このシナリオには重大な問題点が存在することが指摘されている．それは，以下で議論するように，せっかく M_{GUT} のエネルギー・スケールで正のバリオン数が生成されたとしても，標準模型における **“スファレロン” 効果**と呼ばれる M_W のスケールで生じる**量子異常 (anomaly)** によるバリオン数の破れによって “洗い流され” て再びゼロに戻ってしまう，という深刻な問題である．次の節で，このスファレロン効果について解説し，また GUT に代わるバリオン数生成の可能なシナリオについても簡単に言及する．

10.4 スファレロンによるバリオン数の破れ

既に述べたように，大統一理論とは違って標準模型ではバリオン数 B，レプトン数 L を破る相互作用は存在せず，少なくとも量子効果を無視した古典のレベルでは，これらの保存量に対応する 4 元カレント（ここでは 1 世代分のみ考える）

$$j^\mu_B = \frac{1}{3}(\bar{u}\gamma^\mu u + \bar{d}\gamma^\mu d), \tag{10.25}$$

$$j^\mu_L = \bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e + \bar{e}\gamma^\mu e \tag{10.26}$$

は保存する：

$$\partial_\mu j_B^\mu = 0, \qquad \partial_\mu j_L^\mu = 0. \tag{10.27}$$

しかしながら，量子レベルでは，トゥフーフトによって指摘されたように標準模型が“**カイラルな理論**”（相互作用がカイラリティーに依存し，右巻き，左巻きが非対称な理論）であることを反映して存在する“**量子異常 (anomaly)**”のために，これらのカレントはもはや保存しなくなる[15]（ここでは**インスタントン解**が重要となるので，**ユークリッド時空**を考え，4 元ベクトルの添字の上下は区別しないことにする)：

$$\partial_\mu j_B^\mu = \frac{N_g}{32\pi^2} g^2 F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu}, \tag{10.28}$$

$$\partial_\mu j_L^\mu = \frac{N_g}{32\pi^2} g^2 F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu}. \tag{10.29}$$

ここで N_g は世代数であり，(電場と磁場の交換に相当する）**双対変換**した場の強さテンソルを

$$\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\alpha\beta} \tag{10.30}$$

で定義した．また $a = 1, 2, 3$ であり，場の強さは $SU(2)_L$ ゲージボソンに関してのものである．ここで注意すべきは，B も L も量子レベルでは保存しなくなるが $\boldsymbol{B-L}$ は量子異常を持たず**厳密に保存**されることである：

$$\partial_\mu (j_B^\mu - j_L^\mu) = 0. \tag{10.31}$$

これに対して $\boldsymbol{B+L}$ **は保存されない**：

$$\partial_\mu (j_B^\mu + j_L^\mu) = \frac{N_g}{16\pi^2} g^2 F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu}. \tag{10.32}$$

こう考えると，量子異常の効果は大統一理論の場合の X, Y ゲージボソンやカラーを持ったヒッグスによる B, L の破れの場合と非常に似てくる．よって，もしも量子異常による相互作用が熱平衡状態になると，仮に大統一理論で M_{GUT} のスケールでバリオン数を生成したとしても，標準模型のこの効果でせっかく作られたバリオン数が“**洗い流されて (wash-out)**”しまうことになる．

(10.32) の両辺を全時空間で積分すると，左辺は $B = \int d^3x\, j_B^0$ 等で与えられるバリオン数等の，ユークリッド化した時刻 $\tau = -it$ が $-\infty$ から ∞ に変わるときの変化量 $\Delta(B+L)$ を与える．一方，右辺においては積分が

$$\int d^4x\, \frac{g^2}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu} = n \tag{10.33}$$

のように整数 n（**位相的電荷 (topological charge)**）を用いて表される．つまり

$$\Delta(B+L) = 2N_g n \tag{10.34}$$

のように量子異常の効果で $B+L$ が変化することが分かる．ところで，(10.33) の積分が整数で表されるのは

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \partial_\mu K_\mu, \\ &K_\mu = 2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta - \frac{2}{3}gA_\nu A_\alpha A_\beta\right) \end{aligned} \tag{10.35}$$

のように被積分関数がカレントの発散の形で書けるからである（ここでは $A_\mu = \frac{\sigma^a}{2}A_\mu^a$ といった行列表示を用いている）．このため，この量の時空間における積分は表面積分になり，整数 n で特徴づけられるゲージ場 A_μ の位相的性質で表されることになるのである．

こうした $B+L$ の変化を実際に引き起こすゲージ場の位相的配位は **"インスタントン (instanton) 解"** と呼ばれ，**ユークリッド時空での自己双対関係 $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$** を満たす．$n=1$ だと 1 インスタントン解と呼ばれる．1 インスタントンはすぐ後で述べる縮退した真空の間のトンネル効果を表していると考えられ，そのトンネル確率は（$n=1$ として）

$$e^{-S(\text{instanton})} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} = e^{-\frac{2\pi\sin^2\theta_W}{\alpha}} \simeq e^{-200}. \tag{10.36}$$

ここで S(instanton) は $SU(2)$ ゲージ場の作用にインスタントン解を代入したもので，自己双対性 $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ と (10.33) を用いると直ちに $\frac{8\pi^2}{g^2}$ であることが分かる．(10.36) より，$B+L$ が保存されなくなるとは言っても，そうした遷移が起きる確率は非常に小さく，実質上こうした効果は無視できるものと考えられていた．その状況を変えたのは**有限温度の場合のスファレロン効果**に関する認識である．

ところで，上で述べたようにインスタントンは，整数で特徴づけられる無限に縮退した真空の間のトンネル効果を表すのであるが，この無限に縮退した真空とはどのようなものであろうか．(10.33), (10.34), (10.35) より

$$\Delta(B+L) = N_g\Delta Q \tag{10.37}$$

の関係が得られる．ここで Q は

$$Q \equiv \frac{g^2}{32\pi^2}\int d^3x\, K^0 \tag{10.38}$$

で定義される．この Q は以下で議論するように真空状態において整数をとり，したがって無限に縮退した真空を特徴づけるものである（**チャーン・サイモン (Chern–Simons) 電荷**と呼ばれる）．真空状態ではハミルトニアンはゼロとなるので，ゲージ場は場の強さがゼロとなるような配位，即ち **"pure gauge"** と呼ばれるゼロのゲージ場からゲージ変換で移れるような配位になる．時間依存性を無視すると：

$$gA_i = -i\,U^\dagger\partial_i U \tag{10.39}$$

のように群 $SU(2)$ の要素であるユニタリー行列 U を用いて表される．これを (10.38) に代入すると

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x\, \epsilon^{ijk}\, \mathrm{Tr}(\partial_i U \cdot U^\dagger \partial_j U \cdot U^\dagger \partial_k U \cdot U^\dagger) \tag{10.40}$$

となる．この Q は整数となることが分かる．それは $U(\vec{r})$ は各 $\vec{r}$ に対して 1 つの群の要素を決めているので，3 次元球面 S^3 から $SU(2)$ の群への写像と見なせるが，その写像は**整数で表される一種の巻きつき数**で特徴づけられる．数学的には $\Pi_3(SU(2)) = Z$ と表される．異なる整数 Q を持つ状態は，巻きつき数が違うのでゲージ場の関数の連続変形では結びつかず，位相的に異なる区別されるべき真空状態を表すことになる．$SU(2)$ の場合の以上の議論は少し抽象的だが，もっと簡単な例として（2 次元時空間で）円 S^1 から群 $U(1)$ への写像を考えると，空間座標は $0 \leq x \leq 2\pi$（単位円を考え，その座標を x とした）で，群の元は関数の 1 価性から周期境界条件を満たす e^{iQx}（Q：整数）で表される．x が 0 から 2π まで変化するとき，e^{iQx} は複素平面上では単位円を Q 回だけ回転する．こうして Q が巻きつき数を表しているのが直感的に理解できる．この場合には空間は 1 次元なので (10.40) に対応するのは

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx\ -i\left(\frac{\partial}{\partial x} e^{iQx}\right) e^{-iQx} \tag{10.41}$$

という自明の関係式となる．

こうしてインスタントンによって異なる整数 Q を持つ異なる真空の間の遷移が起きることは分かった．ところで (10.37) より Q はバリオン数に対応する量子数のはずである．一方，上述のように Q の違いはゲージ場の配位の違いであり，バリオン数が変わる，即ちクォークが生成したりするということとは一見無関係に見える．しかし実際には，例えば $Q = 0$ の状態の真空の場合に，ディラックの海が負エネルギー状態のクォークで満たされていて正エネルギー状態は無く，普通の意味のクォークが存在しない $B = 0$ の状態であるとすると，クォークの $SU(2)$ ゲージ場との結合によりクォークのエネルギーが影響を受け，$Q = 1$ のゲージ場の場合には $Q = 0$ のときには負エネルギーの状態にあったものが 1 つだけ正エネルギーの状態に移って $B = 1$ をもたらすことになる [16]．

標準模型でも量子異常の効果でバリオン数やレプトン数が破れることが分かったが，既に述べたように，こうした破れを引き起こすインスタントン効果はいわば異なる縮退した真空の間を，これらを隔てるポテンシャルの壁をトンネル効果で通過して遷移することを表していて，その確率は (10.36) で与えられるように非常に小さいもので実質的には無視できると思われていた．しかし，クリンクハンマー (F.R.Klinkhammer) とマントン (N.S.Manton) が $Q = 0$ と $Q = 1$ を結ぶ位相的電荷が $\frac{1}{2}$ のゲージ場の静的な古典解を見つけ [17]，状況が変わってきた．この古典解は，いわば 2 つの真空を隔てる**ポテンシャル障壁の**

頂上を超えての遷移を表しているもので，トンネル効果を表すインスタントン（こちらは位相的電荷が整数）とは区別され“**スファレロン (sphaleron)**”と呼ばれる．この解をゲージ場の作用積分に代入することで，スファレロンの質量に当たるものが以下のように求められる：

$$M_{sph} = c\frac{8\pi}{g^2}M_W. \tag{10.42}$$

ここで定数 c は標準模型のヒッグスの自己相互作用項の結合定数 λ に依存して変化するが $1.6 \le c \le 2.7$ である．

クミン・ルバコフ・シャポシュニコフ (V.A.Kuzmin, V.A.Rubakov, M.E. Shaposhnikov : KRS) は，宇宙初期に実現している高温の状況下では，エネルギーの熱的揺らぎによってポテンシャル障壁を容易に超えることができること，したがってバリオン数を破る遷移が抑制されないことを指摘した[18]．具体的には，ボルツマン因子

$$e^{-\frac{M_{sph}}{kT}} \tag{10.43}$$

がオーダー 1，したがって温度 T が弱スケールより少し高いくらいの状況下ではバリオン数の破れが抑制されずに起きることになる．こうしたスファレロンによる“**KRS 効果**”により，既に述べたように，仮に大統一理論でバリオン数生成が実現しても，生成されたバリオン数が弱スケールのエネルギー領域で洗い流され消去されてしまうことになる．よって，宇宙における物質の起源，あるいは消えた反物質を説明するためには，これに代わるバリオン数生成のシナリオが必要とされる．次節で，こうしたシナリオの代表的なものに関して簡単に議論することにしよう．

10.5 スファレロンを用いたバリオン数生成のシナリオ

$SU(5)$ のような大統一理論 (GUT) では，バリオン数を破る相互作用によってバリオン数生成が可能であることを議論したが，正確には GUT の相互作用において $B-L$ は保存されるので，初期条件の $B-L=0$ （初期条件は $B=L=0$）は保ちながら $B+L$ を正の値として生成するというシナリオになっている．スファレロンの効果も同様に $B-L$ を保存しながら $B+L$ の保存を破るので，せっかく大統一理論で $B+L$ が生成されても KRS 効果で“洗い流される”ことになるのである．この重大な問題を解決しバリオン数生成を実現するものとして，ここでは代表的な 2 つのシナリオに関して簡単に議論しよう．

10.5.1 標準模型によるバリオン数生成のシナリオ

一つの可能性は，バリオン数生成のメカニズムとして KRS 効果そのものを用

いる方法である．つまり，仮にバリオン数がいったん消去されたとしても，これを弱スケール M_W で再び生成すればよい，という考え方である．つまり，理論を拡張することなく標準模型の枠内でバリオン数生成を実現しようというもので魅力的なシナリオであると言える．サハロフの3条件のうち，スファレロン効果によりバリオン数が破れること，**小林・益川理論のCP位相**でCP対称性が破れることから2つの条件は満たされていることが分かる．したがって，KRS効果が熱平衡からずれることが可能であれば，こうしたシナリオが成立することになる．

このシナリオに基づき様々な解析が行われてきたが，残念ながら現在の結論としては標準模型のみの枠内では観測されているバリオン数密度を再現することは難しいと思われている．一つには，第3の条件である熱平衡からのずれを実現するには，ヒッグスのポテンシャルにおいて，高温でのゲージ対称性が自発的に破れない真空期待値がゼロの状態から，低温で実現すべきゲージ対称性の破れた真空期待値がゼロでない状態への相転移が，強い1次相転移である必要があるが[19]，解析によるとヒッグスの質量が $m_h = 73.3 \pm 6.4$ (GeV) より大きくなると相転移が2次のオーダーになるので，ヒッグス質量はこれ以下である必要がある．一方で，ヒッグス質量にはCERNのLEP実験から $m_h > 114$ (GeV) という下限が得られていて，これらは相容れない状況にある．また，**小林・益川模型**のCP位相を用いて得られるバリオン数は，観測値を説明するには十分ではないことも指摘されている．つまりCP非対称性は摂動の非常に高次のループ・ダイアグラムで初めて現れ，g^{12} で強く抑制されるために得られるCP非対称性は 10^{-20} のオーダーとなって $kn_B/s \sim 10^{-10}$ を説明するには小さすぎる[19]．標準模型に付加的なスカラー粒子を加えて1次相転移の条件から来る制約を弱めるといった可能性も考えられるので，電弱相互作用によるバリオン数生成の可能性そのものに関しての可否については，まだ確たる結論は得られていない．

10.5.2　レプトン数生成のシナリオ

上述のように，KRS効果によってバリオン数が消去されてしまうのは，スファレロン効果において $B-L$ が保存されるために $B-L=0$ が保たれたままKRS効果によって $B+L=0$ となってしまい，したがって

$$B-L=0, \quad B+L=0 \quad \rightarrow \quad B=L=0 \tag{10.44}$$

となるからであった．したがって，残された論理的可能性として，弱スケール M_W より高いエネルギー・スケールで，“初期条件として” $(B-L)_i \neq 0$ を準備することが考えられる．すると，KRS効果で $B+L=0$ となっても，

$$B=-L=\frac{(B-L)_i}{2} \tag{10.45}$$

が得られることになる．

問題はいかにして M_W より高いエネルギー・スケールで $(B-L)_i \neq 0$ を準備するかであるが，その魅力的な候補として考えられるのが，ニュートリノ質量生成のための**シーソー機構**で現れる右巻きニュートリノの持つ大きなマヨラナ質量の効果による**レプトン数の破れ**を用いて，M_W より上のスケールでレプトン数を生成しようという「**レプトン数生成**」のシナリオである．詳しい内容に関しては，原論文[20]，およびこのシナリオの提唱者により書かれた教科書[12]を参照して頂くことにして，ここではレプトン数生成の機構の要点についてごく簡単に説明する．

標準模型においては右巻きニュートリノは存在せず，ニュートリノは質量を持たない．ニュートリノ質量は仮に存在したとしても非常に小さいはずなので，これはそれなりに理由のある仮定である．しかし，理論的にはニュートリノにも右巻きのワイル・フェルミオンを導入し，up-type クォークのように湯川相互作用によって他の電荷を持ったクォークやレプトン同様にディラック質量を持たせることを禁止する理由は特に存在しない．実際，次の章で議論するように，最近その存在が確実視されているニュートリノ振動の現象は，ニュートリノが質量を持っていることを強く示唆している．しかし，いったんニュートリノがディラック質量 m_D を持つことを許すと，何故ニュートリノ質量だけが他の荷電フェルミオンの質量に比べ極端に小さいのかが大きな問題となる．この問題を自然に解決する機構として提唱されたのがシーソー機構[8]である．それは，右巻きのニュートリノにディラック質量に比べ，ずっと大きなマヨラナ質量 M を与えるというシナリオである．

マヨラナ質量とは，質量項を形成する右巻きと左巻きのワイル・フェルミオンのペア（chiral partner と呼ばれる）が互いに粒子・反粒子の関係にあるような場合の質量のことである．マヨラナ質量項は一般に $\overline{(\nu^C)}\nu = \nu^T C \nu$（$C$：C 変換の行列）のように書かれる．このようなマヨラナ質量を持つ chiral partner どうしを組み合わせて得られる粒子は，荷電共役 (C) 変換の下で不変な粒子・反粒子の区別のないフェルミオンになるが，これがマヨラナ・フェルミオンである．例えば右巻きニュートリノから形成される**マヨラナ・ニュートリノ**は $N = \nu_R + (\nu_R)^C$ である．

右巻きニュートリノが，大きなマヨラナ質量に支配され，ほぼ M の大きな質量を持つマヨラナ・フェルミオンになるのに対して，左巻きニュートリノのほうは M の逆数で抑制された m_D^2/M 程度の非常に小さな質量を持つマヨラナ・フェルミオンになる．一方が重くなると，片方が軽くなるということで，この機構はシーソー機構と呼ばれる．この場合，右巻き，左巻きのニュートリノは（小さな混合の効果を無視すると）それぞれが独立なマヨラナ質量項を持ったマヨラナ粒子となる．

ところで，シーソー機構の本質である右巻きニュートリノのみが大きなマヨ

ラナ質量を持つことの自然な理由はあるかという問題があるが，左右の対称性であるパリティー対称性が大きく壊れていることに起因しているとも言える．実際，左巻きニュートリノは弱い相互作用を持つのに対して右巻きニュートリノは相互作用せず，したがってそのマヨラナ質量項 $M(\nu_R)^T C\nu_R$ はゲージ不変な質量項となりゲージ不変性と矛盾なく M はいくらでも大きくなり得る．M が大きな理由は，それが標準模型を超える何らかの理論のエネルギー・スケールを反映しているからであると考えるのが自然である．実際，左右対称なゲージ対称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ を持った“**左右対称模型**”を考えると，右巻きニュートリノの質量項はもはやゲージ不変ではなく，$\boldsymbol{SU(2)_R}$ **の 3 重項 (triplet)** として振る舞うので（$SU(2)_R$ の第 3 成分の固有値が 1 であるので），マヨラナ質量 M は $SU(2)_R$ の 3 重項として振る舞うヒッグスの真空期待値によって供給される．一方，その真空期待値によって $SU(2)_R$ のゲージ対称性も同時に破れるので，その真空期待値はパリティー対称性の大きな破れを反映して弱スケール M_W よりずっと大きくなる必要がある．これは正に M が m_D よりずっと大きいことを説明していることになるのである．

少し脇道に逸れたが，結局シーソー機構を実現するニュートリノの湯川結合およびマヨラナ質量項は以下のように与えられる：

$$\frac{M_\alpha}{2}\,(\nu_R^\alpha)^T\,C\,\nu_R^\alpha + h_{\alpha\beta}\,\bar{\nu}_R^\alpha\,L^\beta\,\tilde{H} + h.c. \tag{10.46}$$

ここで，L, H はレプトンとヒッグスの 2 重項，M_α は右巻きニュートリノのマヨラナ質量，$h_{\alpha\beta}$ はディラック質量を供給する湯川結合定数である．$\alpha, \beta = 1, 2, 3$ はフレーバーの添字である．ニュートリノは $vh_{\alpha\beta}$（v：ヒッグスの真空期待値）というディラック質量（行列）を持ち，$M_\alpha \gg vh_{\alpha\beta}$ とすると，シーソー機構が働き，$(hv)^2/M$ のオーダーの小さなマヨラナ質量が得られることになる．ここで M, h はそれぞれ M_α, $h_{\alpha\beta}$ を一般的に書いたものである．実際には $h_{\alpha\gamma}\frac{1}{M_\gamma}h_{\beta\gamma}v^2$ を (α, β) 成分とする行列の対角化を行い，その固有値が左巻きニュートリノの小さなマヨラナ質量を与えるが，ここではその詳細には立ち入らない．右巻きの重いマヨラナ・ニュートリノ $N = \nu_R + (\nu_R)^C$（ここではフレーバーの自由度は無視している）は，(10.46) の $h_{\alpha\beta}$ に比例した湯川相互作用によって軽い左巻きニュートリノとヒッグスに崩壊可能であるが，その際，N がマヨラナ・フェルミオンで粒子・反粒子の区別がないために，次のようなレプトン数が逆符号の 2 種類の終状態に崩壊可能である (フレーバーの添字は簡単のため省略している)：

$$\begin{aligned} N &\rightarrow L + \bar{H}, \\ N &\rightarrow \bar{L} + H. \end{aligned} \tag{10.47}$$

よって，CP 対称性の破れによってこれら 2 つのチャンネルへの崩壊幅に差が生じると，それにより 0 でないレプトン数 L の生成が可能になる．

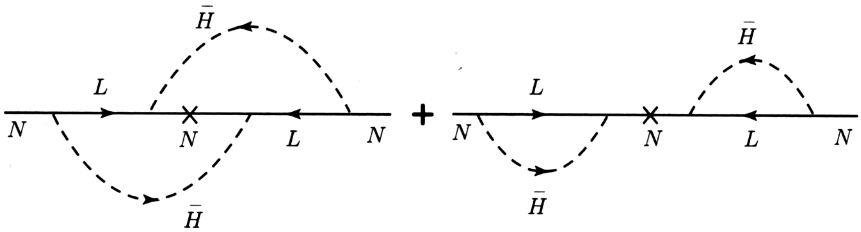


図 10.4 右巻きマヨラナ・ニュートリノの崩壊によるレプトン数生成.

こうしたレプトン数生成に必要な CP 対称性の破れは図 10.4 のファインマン図の吸収項によって表されるような，tree レベルのダイアグラムと 1-loop ダイアグラムとの干渉によって生じることになる．この図で×は右巻きニュートリノのマヨラナ質量項の挿入を表し，このために湯川結合の寄与は $|(hh^\dagger)_{\alpha\beta}|^2$ ではなく $\left[(hh^\dagger)_{\alpha\beta}\right]^2$ になり，CP 非対称性に寄与する虚数部分 $\mathrm{Im}\{\left[(hh^\dagger)_{\alpha\beta}\right]^2\}$ $(\alpha \neq \beta)$ が 1-loop ダイアグラムで出現することになる．この **CP 位相**は，次章のレプトン・セクターにおける CP 対称性の破れの議論の所で現れる，"**MNS 行列**" から構成されるヤールスコッグ・パラメターとは別の物理量であり，**マヨラナ粒子特有のマヨラナ位相**（マヨラナ質量項が re-phasing の下で位相を変えてしまうことに起因する）と呼ばれる CP 位相の寄与と見なせることに注意しよう．実際，ヤールスコッグ・パラメターとは違い，$\left[(hh^\dagger)_{\alpha\beta}\right]^2$ は re-phasing 不変な形をしていない（re-phasing 不変性は右巻きニュートリノのマヨラナ質量 M_α の re-phasing による位相変化も考慮すると保障されることが分かる）.

これから先の議論は，$SU(5)$ GUT におけるカラーを持ったヒッグスの崩壊に関する議論と同様である．その結果，マヨラナ質量 M が 10^9 (GeV) 程度より大きくなると熱平衡からのずれが実現され，観測されている $(kn_B)/s$ を説明できることが示されている [12], [20].

第 11 章
レプトン・セクターにおける CP 対称性の破れ

既に何度か繰り返し述べたように，**小林・益川による CP 対称性の破れの機構**は**フレーバー混合**とそれにより引き起こされる **FCNC 過程**を本質的に必要とするものである．FCNC 過程はクォークの世代に依存した**質量の差**からくる**フレーバー対称性の破れ**によって生じる現象と言えるが，標準模型ではニュートリノに関しては左巻きの状態のみ導入されているためにディラック質量を持つことができない．厳密には，左巻きのニュートリノのみでマヨラナ質量項を形成する可能性は残るが，これも標準模型ではレプトン数 L が保存されるので，この質量項もあり得ないことになる（前の章で議論した量子異常によるレプトン数の破れは一つの可能性であるが，この量子異常は $B-L$ の保存則は破らないのでマヨラナ質量項を生成することはできない）．

ニュートリノ質量がゼロである限り，クォーク・セクターとは違い，レプトン・セクターにおいてはフレーバー混合やそれにより生じる CP 対称性の破れは起こり得ないことになる．しかしながら，かなり前から理論的にはニュートリノのみが質量を持たない必然性が無いことから，前章で述べた**シーソー機構**[8] のようなニュートリノの質量が極端に小さいことを自然に説明できるシナリオが提唱されていた．また実験的にも，太陽中心部での核融合反応の際に生成される “**太陽ニュートリノ**” が理論的予想より少ない頻度でしか地球上では検出されないという “**太陽ニュートリノ問題**” が指摘されていて，これは以下で議論する**ニュートリノ振動**によるものではないかと考えられてきた．また，最近の岐阜県の神岡鉱山でのカミオカンデ，スーパーカミオカンデ実験によって宇宙線が地球の大気にぶつかって生成される “**大気ニュートリノ**” についてもニュートリノ振動を示すデータが得られる，という大きな成果があった．更には，こうした太陽，大気ニュートリノの振動を地上で検証する，**カムランド (KamLAND) 実験**や KEK の実験施設から神岡に向けニュートリノのビームを照射する **K2K・T2K 実験**においてもこうした振動を示すデータが得られている．こうしてニュートリノ振動はもはや揺るぎない事実であると思われて

いる．

ニュートリノ振動とは弱い相互作用で生成されたあるフレーバーのニュートリノ，例えば太陽ニュートリノの場合なら ν_e の**存在確率が時間的に振動**し，検出器に到着したときには ν_e の存在確率が減少したり極端な場合には完全に無くなってしまう現象である．ラグランジアンがエルミートである限りユニタリティーが保障されニュートリノ全体としての存在確率は保存するはずなので，実際には消滅した確率の分だけ**別のニュートリノに変化**しているはずである．最も有力で通常議論されている説は，別のフレーバーのニュートリノ（太陽ニュートリノの場合には ν_μ, ν_τ）に変化したというものである．即ち，クォーク・セクターでの FCNC による $s \to d$ といったフレーバー混合と同様なフレーバー混合がレプトン・セクターでも起きている．これはクォーク・セクターの場合と同様に，ニュートリノには小さいながらも質量があり，その質量差のためにフレーバー混合が物理的に意味をなすことを示している．

即ち，クォーク・セクターの場合と同様に弱い相互作用で生成される "**弱固有状態**" のニュートリノ $\nu_{e,\mu,\tau}$ と "**質量固有状態**" $\nu_{1,2,3}$ は同一ではなくユニタリー変換の分だけずれていることになる：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L . \tag{11.1}$$

ここで U はユニタリー行列で，フレーバーの変わるニュートリノ振動を最初に議論した牧二郎，中川昌美，坂田昌一の名前を冠して，**牧・中川・坂田 (MNS) 行列**と呼ばれている．例えば ν_{eL} は e_L と $SU(2)_L$ 2 重項のペアを組んでいるが，e_L は質量固有状態だと思っているので MNS 行列は荷電レプトンとニュートリノの質量固有状態の間のずれを表していることになり，その意味でクォーク・セクターの**小林・益川行列**に対応する．なお，クォークの場合には u, d といった質量固有状態が確定したフレーバーを持つ状態であると見なされるが，レプトンの場合には，上の議論のように ν_e 等の弱固有状態を各々のフレーバーを持つ状態のように見なしている．単なる呼び方の問題という言い方も可能だが少し注意が必要である．

物理的には，**ニュートリノ振動**は波動でよく知られた "**うなり**" と同様な現象であると考えることもできる．$\nu_\alpha\,(\alpha = e, \mu, \tau)$ として生成されたニュートリノは (11.1) で与えられるように $\nu_{1,2,3}$ がある割合で混ざった状態である．仮に $\nu_i\,(i = 1, 2, 3)$ の運動量の大きさをすべて同じにとって p だとすると，ν_i の物質波の波長は共通になるが，ν_i の質量 $m_i\,(i = 1, 2, 3)$ の違いによってエネルギー，したがって物質波の振動数はわずかに異なることになる．ν_i についてはエネルギーは

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \simeq p + \frac{m_i^2}{2E} \tag{11.2}$$

と表される．ここでニュートリノ質量が小さいことから $m_i \ll p$（$E \simeq p$. E は平均的なニュートリノのエネルギー）の近似を用いた．上式の右辺 2 項目の $\frac{m_i^2}{2E}$ が m_i に依存するために振動数がわずかに異なることになり，これらの物質波が混ざることで "うなり" が生じる．うなりとは波の振幅が重ね合わされる波の振動数の差を振動数としてゆっくり振動することであるが，一方量子論では振幅（の絶対値 2 乗）は粒子の存在確率を示しているのでニュートリノ振動が起こることが理解される．

以下でこのことを具体的計算によって示すことにする．まず，質量固有状態 ν_i に関する物質波の時間発展を決める方程式は，エネルギーとして (11.2) 式の 2 項目のみを考慮すると

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

で与えられる．これを，(11.1) のユニタリー変換によって（具体的には左から U を掛け算して）弱固有状態に関する方程式に書き直すと（左巻きを表す L は省略する）

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger \cdot \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

この微分方程式は容易に解けて，時刻 t における物質波は時刻ゼロにおける初期条件を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{pmatrix} &= \exp(-iU \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} U^\dagger t) \cdot \begin{pmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} e^{-i\frac{m_1^2}{2E}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{m_2^2}{2E}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{m_3^2}{2E}t} \end{pmatrix} U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11.5}$$

と与えられる．この結果を用いると，時刻ゼロに ν_α として生成されたニュートリノが時刻 t に ν_β として観測される確率は（α, $\beta = e, \mu, \tau$. $\alpha = \beta$ でも構わない）

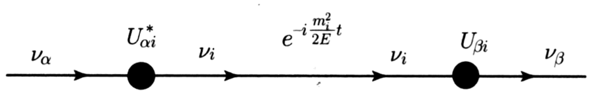


図 11.1　ニュートリノ振動の確率振幅を与える式の意味.

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \left| \sum_i U_{\beta i}\, e^{-i\frac{m_i^2}{2E}t}\, U^*_{\alpha i} \right|^2$$
$$= \left| \sum_i U_{\beta i}\, e^{-i\frac{\Delta m_{i1}^2}{2E}t}\, U^*_{\alpha i} \right|^2 . \qquad (11.6)$$

ここで，2 行目に移る際に $\frac{m_i^2}{2E} = \frac{m_i^2 - m_1^2}{2E} + \frac{m_1^2}{2E}$ とし，i に依らない $\frac{m_1^2}{2E}$ による共通の位相因子を無視した．また $\Delta m_{i1}^2 = m_i^2 - m_1^2$ という記法を用いた．この式の 1 行目の絶対値の中の，ニュートリノ振動の確率振幅を与える部分の意味は図 11.1 のようにして容易に理解できる．即ち，ν_α で生成されたニュートリノは $U^\dagger_{i\alpha} = U^*_{\alpha i}$ によるユニタリー変換で ν_i に変換され，ν_i は $e^{-i\frac{m_i^2}{2E}t}$ で時刻 t まで時間発展し最後に $U_{\beta i}$ によるユニタリー変換で ν_β に変換される，というように理解可能である．

(11.6) は $\cos(\frac{\Delta m_{i1}^2}{4E}t)$, $\sin(\frac{\Delta m_{i1}^2}{4E}t)$ といった三角関数を用いて表されるので，確かに確率が時間と共に振動することが分かる．また，最初に述べたように，**ニュートリノ質量がゼロであるとニュートリノ振動が起きないことが** (11.6) より分かる．実際，$\Delta m_{i1}^2 = 0$ だとすると，ユニタリティー $\sum_i U_{\beta i} U^*_{\alpha i} = \delta_{\alpha\beta}$ より，$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ であることが直ちに確認できる．

こうしてニュートリノの質量（2 乗）差によって 3 世代のレプトン・セクターにおいてフレーバー混合が物理的意味を持つようになると，小林・益川の議論と全く同様に **CP 対称性の破れ**がユニタリー行列 U に含まれる位相因子によって生じることになる．以下，こうした**レプトン・セクターにおける CP 対称性の破れ**に関して簡単に見てみよう．

クォーク・セクターで学んだように（7.3 節参照），3 世代のうちのどれか 2 つのニュートリノ質量が縮退すると CP 対称性の破れは生じないことになるはずである．言葉を変えると，CP 対称性の破れを議論する際には，よく用いられるような実質的な 2 世代模型での解析は意味をなさず，3 世代すべてが関与することが本質的に重要である．したがって Δm_{21}^2, Δm_{31}^2 の両方を考慮する必要がある．即ち，3 世代模型の場合の正確な表式である (11.6) を用いて考える必要があることになる．

レプトン・セクターでの CP 対称性の破れを示す典型的な物理量としては，**ニュートリノと反ニュートリノの振動確率の差（非対称性）**

$$A^{CP}_{\alpha\beta} = P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) \qquad (11.7)$$

がある．ここで，常に成り立つ CPT 定理より，CP 変換 $\nu_\alpha \to \bar{\nu}_\alpha$，等の後に

時間の向きを逆転させたニュートリノ振動の確率は等しいので

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\beta \to \bar{\nu}_\alpha) \tag{11.8}$$

が成立することに注意しよう．ただし，この関係は真空中でのニュートリノ振動に関するものである（太陽ニュートリノの場合に重要となるような物質との相互作用は考えない）．(11.8) より CP 非対称性は次のような時間反転 T の下での非対称性に等しいことが分かるが，これは CPT 定理より当然と言える：

$$A^T_{\alpha\beta} = P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) - P(\nu_\beta \to \nu_\alpha). \tag{11.9}$$

この $A^{CP}_{\alpha\beta} = A^T_{\alpha\beta}$ という性質は (11.6) より具体的に確かめることもできる．実際，CP 変換によりすべての MNS 行列の要素は $U_{\alpha i} \to U^*_{\alpha i}$ のように変換するが，(11.6) においてこの変換は $\alpha \leftrightarrow \beta$ の交換，したがって T 変換に等しいことが分かる．

(11.9) からただちに分かる $A^T_{\alpha\beta} = -A^T_{\beta\alpha}$ という自明な関係式から

$$A^{CP}_{\alpha\beta} = -A^{CP}_{\beta\alpha} \tag{11.10}$$

が得られる．特に $A^{CP}_{\alpha\alpha} = 0$，即ち

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\alpha) = P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\alpha) \tag{11.11}$$

という帰結が得られ，あるフレーバーのニュートリノの減り方を見る**消滅 (disappearance) 実験**で測定される“**生き残り確率 (survival probability)**” $\boldsymbol{P(\nu_\alpha \to \nu_\alpha)}$ に関する実験では CP 非対称性は検証できず，検出器においてフレーバーが変わっていることを直接見る **“appearance” 実験**においてのみ検証が可能であることが分かる．

一方で，ニュートリノ振動でフレーバーが変化したとしてもニュートリノとして存在する確率自身は保存されるので，終状態に関するフレーバーの足し上げを行うと

$$\sum_{\beta=e,\mu.\tau} P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \sum_{\beta=e,\mu.\tau} P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) = 1 \tag{11.12}$$

が言える．よって CP 非対称性に関して

$$\sum_\beta A^{CP}_{\alpha\beta} = 0 \tag{11.13}$$

が成り立つことが分かる．これから $A^{CP}_{\alpha\alpha} = 0$ および $A^{CP}_{\alpha\beta} = -A^{CP}_{\beta\alpha}$ と合わせると $\alpha = e$ の場合に関して

$$A^{CP}_{e\mu} = A^{CP}_{\tau e} \tag{11.14}$$

が成立することが分かる．$\alpha = \mu$ の場合に関しても同様に

$$A_{\mu\tau}^{CP} = A_{e\mu}^{CP} \tag{11.15}$$

が言えるのである．これらの関係式を合わせると，次のような 3 世代模型特有の予言が得られる：

$$A_{e\mu}^{CP} = A_{\mu\tau}^{CP} = A_{\tau e}^{CP} \equiv A^{CP}. \tag{11.16}$$

(11.16) の関係式は，小林・益川模型の場合と同様に 3 世代の場合には CP 位相に対応するものは 1 つだけであることを示唆していると言える．実際，A^{CP} を (11.6) を用いて具体的に計算すると，任意の (α, β) の組合せに対して

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{CP} &= P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \to \bar{\nu}_\beta) \\ &= -4 \sum_{i<j} \mathrm{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \cdot \sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t\right) \end{aligned} \tag{11.17}$$

が得られる．ここで $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$．$\mathrm{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \equiv J_{\alpha\beta,ij}$ と書くことにすると，この $J_{\alpha\beta,ij}$ が MNS 行列に存在する CP 位相による CP 非対称性を表す部分であり，クォークの場合の**ヤールスコッグ・パラメターに相当**すると予想される．実際，$J_{\alpha\beta,ij}$ は $\alpha = \beta$ だと消え，また 0 とならない場合でも U のユニタリティーを用いると，符号の違いを除きただ 1 つの値をとることが分かる．この議論は 7.3 節で小林・益川行列に関して行ったものと全く同じなのでここでは省略する（(7.50) 参照）．こうして

$$J \equiv J_{e\mu,12} \tag{11.18}$$

と定義すると，この J はちょうどクォーク・セクターでのヤールスコッグ・パラメターに対応するものであることが分かる．(11.16) で述べた $A_{\alpha\beta}^{CP}$ が実際には単一の値しかとらないのは，正に 1 つの J だけで CP 非対称性が記述されることの帰結である．ヤールスコッグ・パラメターはクォーク・セクターで議論したように re-phasing 不変な量であるが，ニュートリノ振動の確率は当然物理量で re-phasing 不変であるはずであり，J が現れるのは当然の結果であるとも言える．

実際に MNS 行列を 3 つの角度 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}$ および 1 つの CP 位相 δ で

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{11.19}$$

のように書くと（ここで $c_{12} = \cos\theta_{12}$, $s_{12} = \sin\theta_{12}$ 等），J は具体的に

$$J = c_{12}\, s_{12}\, c_{23}\, s_{23}\, c_{13}^2\, s_{13}\, s_\delta \tag{11.20}$$

と書くことができる．(11.17) において $\alpha = e, \beta = \mu$ とし，また $J_{e\mu,12} = J_{e\mu,23} = J_{e\mu,31}$ という性質を用いると（クォーク・セクターのときの議論を参照），(11.16) の A^{CP} は

$$\begin{aligned} A^{CP} =& -4J\left\{\sin\left(\frac{\Delta m_{12}^2}{2E}t\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{23}^2}{2E}t\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2}{2E}t\right)\right\} \\ =& \ 16J\sin\left(\frac{\Delta m_{12}^2}{4E}t\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{23}^2}{4E}t\right)\sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E}t\right) \end{aligned} \tag{11.21}$$

で与えられることが分かる．ここで2行目に移る際に $\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2 + \Delta m_{31}^2 = 0$ の関係を用いた．(11.20), (11.21) より，CP 非対称性 A^{CP} は次のいずれか1つでも実現すると消えてしまうことが分かる：

(1) 3つのニュートリノ質量のうちで，どれか2つの質量が縮退する：
$\Delta m_{12}^2 = 0$, $\Delta m_{23}^2 = 0$ あるいは $\Delta m_{31}^2 = 0$.
(2) 3つの混合角 θ_{ij} あるいは CP 位相 δ のいずれかが消える．
(3) 振動確率，即ち $\sin(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t)$ の時間平均をとる．

(2) の条件に関しては，太陽ニュートリノ，および大気ニュートリノに関するニュートリノ振動のデータから θ_{12}, θ_{23} に関してはかなり大きく（θ_{23} に関しては，**最大の混合 $\boldsymbol{\theta_{23} \simeq \frac{\pi}{4}}$** になっていると言われている）CP 非対称性の検証にとって望ましいが，θ_{13} に関しては小さいと思われていて，その上限のみが知られていた．しかし，ごく最近（2011 年）発表された **T2K 実験**の $\nu_\mu \to \nu_e$ 振動に関する "appearance" 実験のデータからは **0 でない $\boldsymbol{\theta_{13}}$ が示唆**されている．また，レプトン・セクターでの CP 対称性の破れを実験的に検証するためには，(1), (3) の状況を避ける必要があり，CP 対称性の破れの検証には工夫が必要とされる．特に，$\Delta m_{21}^2 \sim 10^{-5}$ (eV^2) という小さな質量の差を無視すると CP 非対称性が消えるのであるから，この小さな質量差に感度のある精密な実験が要求されることになる．また，ニュートリノのエネルギーや検出器までの距離（ニュートリノの "飛行" 時間）に関する平均を取ると CP 非対称性は消えてしまうので，この点も工夫が必要である．更に，これまでの議論では太陽ニュートリノの振動を考える際に重要な役割を果たす**物質効果**（ニュートリノが媒質中の物質と弱い相互作用をして得るポテンシャルによる効果）は考慮されておらず真空中でのニュートリノ振動を仮定していた．地上の実験でも，比較的長い距離を "飛行" させるニュートリノ振動実験では，飛行経路が一部地中になるために小さいながら物質効果を考える必要が生じ得る．問題は，物質は当然粒子だけでできていていわば CP 非対称な存在なので，**物質効果が真の CP 非対称性と同様の効果**を与えて見分けが困難になる可能性があることである．地上での実験の場合には物質効果は一般に小さいであろうが，見ようとしている CP 非対称性も大きくはないはずであり，この問題をいかに避けるかも考慮すべき論点である．

付録 A
自発的なCP対称性の破れ

CP 対称性の破れを説明する**小林・益川模型**は，その予言どおり 3 世代の存在が確定し，また B 工場実験のデータがこの模型を明確に支持していること，LEP の加速器実験におけるゲージボソン $\boldsymbol{Z}$ **の崩壊幅**の測定や**宇宙論**の議論からも 3 世代模型が強く支持されていることもあり，非常な成功を収めた確立した理論である．しかしながら，標準模型の枠内では湯川結合は理論的に決定することのできないパラメターであり，小林・益川模型の **CP 位相** $\boldsymbol{\delta}$ に関してもその値を予言することはできない．また，10 章で議論したように純粋な標準模型の枠内では現在の宇宙の物質の密度（バリオン数密度）を再現することができないと思われている．

根本的な問題点は，標準模型は非常に成功した理論ではあるが，ゲージ相互作用のセクターに比べ，湯川結合のみならずヒッグス相互作用のセクターが色々と理論的な問題を含んでいるように思われることである．CP 位相を含め，湯川結合等の**理論的に決められないパラメターが多く存在**する，という問題に加え，ヒッグス質量（2 乗）への量子補正が，理論のカットオフ（標準模型の適用限界）を Λ として Λ^2 に比例する "2 次発散" を持つという問題もある．$\Lambda \sim M_{GUT}, M_{pl}$ (M_{pl} : プランク・スケール) とすると，量子補正を考慮した上でヒッグス質量を弱スケール M_W に保ち，したがって $M_W \ll M_{GUT}$ といった階層性を維持するためには，理論の（"裸の"）質量パラメターを例えば $M_W^2/M_{GUT}^2 \sim 10^{-26}$ といった非常な精度で**微調整**する (fine-tuning) 必要がある．この問題は「**階層性問題**」と呼ばれる．

現在，**超対称性理論**や 3 次元以外の余分な**余剰次元 (extra-dimension)** の空間を持つ**高次元時空上の理論**，等の **"標準模型を超える理論"(beyond the standard model)** が盛んに研究されている．その検証を行うことがヒッグスの発見と並んで現在（2012 年）CERN で行われている **LHC 実験**の重要な目的になっているが，これらの理論は上記の階層性問題を解決することを主目的として提唱されたと言っても過言ではない．

こうした標準模型を超える理論においてはヒッグスの相互作用に関して，より深い理解や何らかのヒントが得られることが期待される．また，それと同時にCP対称性の破れに関しても，その起源に関するより深い理解，あるいは小林・益川理論とは異なるCP対称性の破れの機構の可能性等が得られることが期待される．

この付録では，こうした標準模型を超える理論における，小林・益川理論とは異なるCP対称性の破れの機構の可能性に関して，2つほど話題を選んで解説したいと思う．まずとり上げるのは自発的なCP対称性の破れの機構である．その機構のエッセンスを以下に簡単にではあるが解説したい．

小林・益川理論においてはCP対称性は湯川結合が複素数で位相（**CP位相**）を持つことによって破れる．したがって理論の作用，ラグランジアン自身がCP変換の下で不変ではなく，理論そのものがCP対称性を持たない．この場合，**CP対称性はあからさまに（explicit に）破れている**と言われる．しかし，もう一つ別の可能性としてゲージ対称性と同様に**CP対称性も自発的に破れる**ことが可能であり，実際それを具現化する模型も提唱されている[21],[22]．

自発的にCP対称性が破れるというのは，具体的には湯川結合やヒッグス・ポテンシャルの項の係数がすべて実数であり理論自身はCP対称性を持つが，ヒッグスの真空期待値がCP位相を持つことで真空状態がCP不変でなくなる，ということである．しかし，標準模型のようにヒッグス2重項（$SU(2)_L$ の）が1つだけの場合にはヒッグス場の re-phasing の下でヒッグス・ポテンシャル（そして当然その運動項も）不変であるために，仮に真空期待値が位相を持ったとしても re-phasing によってその位相を消し去ることが可能であり，CP対称性は実際には破れないことになる．標準模型で真空期待値を実だと仮定して良いのはこの自由度のためである．この議論から，物理的にCP対称性の破れが起きるためには**複数のヒッグス**が存在し，それらの真空期待値の間に**相対的な位相**が存在することが本質的に重要であることが分かる．

そこで，まずは一番簡単なヒッグス2重項が2つある場合をとり上げ，CP対称性を自発的に破る機構の要点を解説しよう．2つのヒッグス2重項を ϕ_1, ϕ_2 とする．真空期待値はヒッグス・ポテンシャルの最小化によって決定されるので，これらから構成される最も一般的なポテンシャルを書き下すと次のようになる：

$$
\begin{aligned}
V(\phi_1, \phi_2) = {} & \mu_1^2\, \phi_1^\dagger \phi_1 + \mu_2^2\, \phi_2^\dagger \phi_2 + (\mu_{12}^2\, \phi_1^\dagger \phi_2 + h.c.) \\
& - \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 - \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 - \lambda_3 (\phi_1^\dagger \phi_1)(\phi_2^\dagger \phi_2) \\
& - \lambda_4 (\phi_1^\dagger \phi_2)(\phi_2^\dagger \phi_1) - \frac{1}{2}[\lambda_5 (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + h.c.] \\
& - [(\lambda_6\, \phi_1^\dagger \phi_1 + \lambda_7\, \phi_2^\dagger \phi_2)\phi_1^\dagger \phi_2 + h.c.]. \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

ここで $h.c.$ は，その前の項のエルミート共役をとるという意味である．ラグラ

ンジアンのエルミート性から μ_1^2, μ_2^2 および λ_1 から λ_4 までは必然的に実である．一方 μ_{12}^2 および $\lambda_{5,6,7}$ は複素数になり得るが，逆に言うとこれらの係数を持つ項は ϕ_1 と ϕ_2 の間の相対位相に依存する項であり，μ_{12}^2 と $\lambda_{5,6,7}$ のすべてが実であり理論自身は CP 対称性を持っていたとしても，これらの係数の符号を適切にとれば相対位相が存在するほうがポテンシャルが小さくなって真空期待値が相対位相を持つことが可能となる：

$$\langle\phi_1^0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}\cos\beta e^{i\delta}, \qquad \langle\phi_2^0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}\sin\beta. \tag{A.2}$$

ここで，(A.1) が $\phi_{1,2}$ を同位相で位相変換する変換の下で不変であることから一般性を失わずに ϕ_2 の真空期待値を実にとれることを用いた．また $\frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{|\langle\phi_1^0\rangle|^2 + |\langle\phi_2^0\rangle|^2}$ は標準模型のヒッグスの真空期待値に対応する．実際 W ゲージボソン等の質量はこの v を用いて標準模型と同じ関係式で与えられることが容易に理解できる．

こうした 2 つのヒッグス 2 重項の真空期待値の間の相対位相によって例えば中性 K 中間子系における CP 非対称性 ϵ, ϵ' が実際に生じるためには，ヒッグスのクォークとの湯川相互作用が必要となる．最も一般的な湯川結合は (7.2) を 2 個のヒッグスの場合に一般化した

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y = & -\overline{Q_i^0}\,(f_d^{(1)})_{ij}\,\phi_1\,d_{jR}^0 - \overline{Q_i^0}\,(f_d^{(2)})_{ij}\,\phi_2\,d_{jR}^0 \\ & -\overline{Q_i^0}\,(f_u^{(1)})_{ij}\,\tilde{\phi}_1\,u_{jR}^0 - \overline{Q_i^0}\,(f_u^{(2)})_{ij}\,\tilde{\phi}_2\,u_{jR}^0 + h.c.\end{aligned} \tag{A.3}$$

で与えられる．ここでは自発的な CP 対称性の破れを考えたいので，湯川結合 $f_{u,d}^{(1)}$, $f_{u,d}^{(2)}$ はすべて実であるとする．よってこの段階では CP 対称性の破れは生じないように見える．しかし，ヒッグスをその真空期待値で置き換えて得られるクォークの質量行列 M_d, M_u は，down-type, up-type のそれぞれのクォーク・セクターに関して

$$\begin{aligned}(M_d)_{ij} &= (f_d^{(1)})_{ij}\langle\phi_1^0\rangle + (f_d^{(2)})_{ij}\langle\phi_2^0\rangle, \\ (M_u)_{ij} &= (f_u^{(1)})_{ij}\langle\phi_1^0\rangle + (f_u^{(2)})_{ij}\langle\phi_2^0\rangle\end{aligned} \tag{A.4}$$

で与えられ，$\langle\phi_1^0\rangle$ の CP 位相 δ の存在のために一般に複素行列になる．クォークが質量固有状態に移れば質量行列は実固有値を持った対角行列に対角化されるので，質量項自身は CP 位相を持たないが，弱固有状態から質量固有状態に移るユニタリー変換の行列は複素行列になるので，質量固有状態で書き直した湯川結合は一般に CP 位相を含むことになる．より正確に言うと，$\cos\beta$ と $\sin\beta$ を係数として $e^{-i\delta}\phi_1$ と ϕ_2 の線形結合をとったヒッグス 2 重項 H がちょうど標準模型のヒッグスに対応し，そのクォークの質量固有状態に関する湯川結合は（標準模型の場合と同様に）質量行列と同時に対角化されて CP 位相を持たない．しかし，これに直交する線形結合のヒッグス 2 重項 H' の湯川結合は一般に複素行列となり，これが CP 位相を生じる原因となる．これを具体的に確

かめてみよう．

まず，H, H' は $e^{-i\delta}\phi_1$, ϕ_2 と直交変換で関係している：

$$\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta}\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

(A.2) の真空期待値を代入すると容易に

$$\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad \langle H' \rangle = 0 \tag{A.6}$$

であることが分かり，確かに H が標準模型のヒッグスの役割をしていることが納得できる．すると，NG ボソンは真空期待値にゲージ変換を施したときにずれが生じる場に対応するので，H が標準模型の場合と同様に 3 つの NG ボソンを供給することが分かる：

$$H = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{v+h+iG^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad H' = \begin{pmatrix} h^+ \\ \frac{s+ip}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

ここで $G^{0,\pm}$ は Z^0, $W^\pm$ に吸収される would-be NG ボソンであり，h, s, p, $h^\pm$ は物理的に残る 5 個のスカラー粒子である．正確には，5 個のうちで p, $h^\pm$ については，質量を持たない NG ボソン G^0, $G^\pm$ とそれぞれ直交する状態なのでそのまま質量の固有状態となるが，中性スカラー粒子 h, s については，一般にはこれらの 2 つの独立な線形結合が質量固有状態になる．K 中間子系での CP 対称性の破れは FCNC 過程に伴って現れるので，電気的に中性の h および s, p に関する湯川結合に焦点を当てることにし，また down-type のクォークに関する部分のみに注目すると，(A.3) に (A.5), (A.7) の関係を代入して

$$\begin{aligned} &-\overline{Q_i^0}\frac{(M_d)_{ij}}{v}d_{jR}^0\,h - \overline{Q_i^0}\left[-\sin\beta\, e^{i\delta}(f_d^{(1)})_{ij} + \cos\beta(f_d^{(2)})_{ij}\right]d_{jR}^0 \\ &\times \frac{s+ip}{\sqrt{2}} + h.c. \end{aligned} \tag{A.8}$$

が得られる．期待したように h の湯川結合は質量行列 M_d に比例しているので，クォークの質量固有状態に移ると，この湯川結合は対角化され実数である質量固有値に比例することになる．よってこちらからは CP 対称性の破れは生じないが，一方でこれとは独立な s, p の湯川結合はクォークの質量固有状態に移った後も一般に非対角の複素行列であり，したがって CP 位相を持つことになる．行列が非対角になるということは s, p に結合するカレントは FCNC を含むことになる．したがって s, p の交換によって，**tree レベルで $\boldsymbol{K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0}$ 混合を引き起こす $\boldsymbol{|\Delta S| = 2}$ の 4 フェルミ演算子**が生じる（図 A.1）．この演算子のウィルソン係数の虚数部分が (9.23) の $\bar{\epsilon}$ に寄与することになる．更に，図 A.1 で 1 つの s クォークを d クォークに置き換えたダイアグラムは $|\Delta S| = 1$ の寄与になるので，その係数が (9.23) の $\mathrm{Im}A_0$ に寄与し，これらの寄与の和が実測される ϵ を与える．

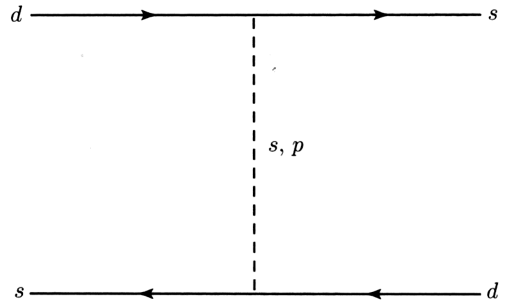


図 A.1　s, p の交換により生じる $|\Delta S| = 2$ の演算子.

こうしてヒッグス 2 重項を 2 個導入することで自発的 CP 対称性の破れが実現可能であることは分かったが，一方で上で議論した模型では tree ダイアグラムのレベルで FCNC が現れてしまう，という望ましくない性質を持つ．標準模型には存在しない s, p 等をポテンシャルの係数を調整して十分重くすることができれば，これらは decoupling を起こして理論は（CP 対称性の破れの無い）標準模型に帰着するので直ちに困る訳ではない．しかし，FCNC が tree レベルでは現れず自然に FCNC を抑制することができ，かつ自発的 CP 対称性の破れを実現する模型が可能であればそのほうが望ましい．

ゲージ理論において **FCNC を自然に抑えるための条件はグラショウ・ワインバーグ** (S.L.Glashow, S.Weinberg) によって考察されている [23]．ヒッグスの湯川相互作用に関する条件は，down-type, up-type のそれぞれのクォークは 1 つのヒッグス 2 重項とのみ相互作用すべし，というものである．例えば（**最小の）超対称的標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model, MSSM)** ではスーパー・ポテンシャルは超対称性を保持するために特定のカイラリティーの場のみで記述される必要があるので，down-type, up-type のそれぞれのクォークと湯川相互作用するヒッグスは，それぞれ H_D, H_U という異なる 2 重項でありグラショウ・ワインバーグの条件を満たしている．このために FCNC は tree レベルでは起きない．

一方で，ヒッグス 2 重項が 2 個の場合を考えると，グラショウ・ワインバーグの条件を課して FCNC を避けることはできても，それと同時に質量行列の対角化と共に CP 位相も消えてしまうという問題が生じる．そこでもう一つだけヒッグス 2 重項を増やして，FCNC を避けながら同時に自発的 CP 対称性の破れを実現する模型が考案されている [22]．この模型では，3 つのヒッグス 2 重項のうちで，MSSM 同様に 2 個の 2 重項のみがクォークとそれぞれ別々に湯川結合を持ち，それぞれのヒッグスの湯川相互作用からは CP 位相は現れないが，3 個のヒッグスの真空期待値が相対位相を持つために，ヒッグスの質量固有状態の場で書き直したときの湯川相互作用に一般に CP 対称性の破れを引き起こす位相が現れることになる．

付録 B
余剰次元によるCP対称性の破れ

付録 A で議論された自発的 CP 対称性の破れの機構は，もちろん通常の 4 次元時空において可能なものであるが，ここでは標準模型を超える理論として最近盛んに研究されている**余剰次元を持った高次元理論**をとり上げる．時空が拡張されることで，通常の 4 次元時空上の理論には無かった新しいタイプの CP 対称性の破れの機構が可能であることを簡単に解説する．

特に，**超弦理論**や，その低エネルギーでの点粒子極限の場の理論とも見なすことができる **"ゲージ・ヒッグス統一理論 (Gauge–Higgs Unification)"** を例にとって，高次元理論特有の**余剰次元の "コンパクト化" の仕方による CP 対称性の破れ**の機構を解説する．ゲージ・ヒッグス統一理論 (GHU) とは 4 次元時空におけるゲージ相互作用とヒッグス相互作用を高次元ゲージ理論の枠内で統一することのできる理論である．

GHU は標準模型を超える理論の興味深い候補として近年研究されているが，そのシナリオは高次元ゲージ場の余剰次元方向の成分をヒッグス場と見なすというものである[24]~[26]．例えば，一番簡単な 5 次元時空上の $U(1)$ ゲージ理論 (QED) の場合だと 5 次元のゲージ場（5 元ベクトル）

$$A_M = (A_\mu,\, A_y) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{B.1}$$

のうち A_μ は通常の 4 次元時空におけるゲージ場（光子）であるが，余剰次元方向の成分 A_y は，4 次元ローレンツ変換の下では不変なので，4 次元時空の立場からはスカラー場であると見なせる．これは元々5 次元時空の場なので $A_y(x^\mu, y)$ のように余剰次元の座標 y にも依存する．ところで，余剰次元が存在したとしても今までその存在を指し示す実験データは無く，したがって余剰次元の空間は現在の実験精度では見ることのできないほど小さな空間に **"コンパクト化"** していると考えられている．例えば，上述の 5 次元 QED で余剰次元が小さな半径 R の円 (S^1) だとすると，A_y は $A_y(x^\mu, y + 2\pi) = A_y(x^\mu, y)$ という周期境界条件を満たし，したがって次のように y に関するフーリエ級数

に展開可能である：

$$A_y(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n}{R}y} A_y^{(n)}(x^\mu) \qquad \left(A_y^{(-n)}(x^\mu) = (A_y^{(n)}(x^\mu))^*\right). \tag{B.2}$$

ここで整数nにより区別されるモードを**カルツァ・クライン (Kaluza–Klein, KK) モード**と呼ぶ．$e^{i\frac{n}{R}y}$ は余剰次元方向の運動量成分が $\frac{n}{R}$ であることを表しているので，$A_y^{(n)}(x^\mu)$ の 4 次元的な質量を M_n とすると，5 次元的なアインシュタインの関係式（on-shell 条件）より

$$p_M p^M = p_\mu p^\mu - p_y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad M_n^2 = p_y^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \tag{B.3}$$

のように $M_n = \frac{n}{R}\,(n \geq 0)$ と決まる．要するに，余剰次元方向の運動量は 4 次元ローレンツ変換の下で不変なので 4 次元から見ると質量に見える，ということである．こうして，R を十分小さくとると $n \neq 0$ の KK モード $A_y^{(n)}(x^\mu)$ の質量は $1/R$ に比例して十分大きくなり，$A_y^{(n)}(x^\mu)$ は低エネルギーの世界から decouple することになる．GHU では，唯一質量がゼロの粒子として残る“**ゼロ・モード**” $A_y^{(0)}(x^\mu)$ を標準模型のヒッグス粒子であると同定する．

そうすると，$A_y^{(0)}$ の真空期待値により通常のヒッグスの真空期待値によるものと同様なゲージ対称性の自発的破れを実現することができる．ただし，正確には QED の場合には光子は電荷を持たずこうした自発的破れは起きないので，ヤン・ミルズ理論を想定する必要がある．こうした自発的破れの機構は“**細谷機構**”と呼ばれる [25]．

更に，標準模型を超える理論の重要な動機づけとなった**階層性問題**に目を向けると，この GHU のシナリオでは，ヒッグス質量への量子補正が 2 次発散するという階層性問題は解決する [26]．それは，高次元的な局所ゲージ対称性のおかげで，ヒッグス質量への量子補正が 2 次発散しないばかりでなく完全に有限になるからである．こうして，GHU は階層性問題を（超対称性に頼ることなく）解決し，標準模型を超える物理の新しい方向性を与えるものであると言える．ヒッグス質量の有限性を示す際に，量子補正における中間状態（仮想状態）についてはすべての KK モードを足し上げることが本質的に重要である [26]．それは，ある KK モードまでで足し上げをカットしてしまうと，これは運動量の余剰次元成分にカットオフを設けることと同等であり，一方ファインマン図の計算において運動量カットオフを用いると局所ゲージ対称性を破ってしまうからである．A_y の質量が有限にとどまるのは局所ゲージ対称性のおかげで質量 2 乗に寄与する局所演算子が禁止されるからであるので，すべての KK モードの足し上げを行って局所ゲージ対称性を保持することが重要になる．

なお，既に少し述べたが，重力まで含めた素粒子のすべての相互作用の統一理論である超弦理論の低エネルギー極限も一種の GHU であることに注意しよ

う．実際，開いた超弦の理論の低エネルギー極限，即ち点粒子の極限は超対称的 10 次元ヤン・ミルズ理論と見なせるが，この理論においては 10 次元の意味ではゲージ場とそのパートナーであるゲージ・フェルミオンしか存在せず，したがってヒッグスは必然的にゲージ場の余剰次元成分から供給されることになる．これは GHU の理論に他ならない．ただし，GHU では理論は超対称性を持つ必要はなく，より一般的であると言える．

さて，ヒッグスが元々はゲージ場だったとすると CP 対称性を破ることは一見不可能に見える．それは，小林・益川理論の場合と違って GHU あるいは超弦理論では**湯川結合は本来はゲージ結合定数**で与えられ，したがって**実数**であって CP 位相を得ることができないように見えるからである．しかし，実は余剰次元のコンパクト化の仕方によって，具体的には余剰次元の幾何学的性質によって CP 対称性を破ることが可能であることが分かる [27], [28]．このことを理解する鍵として，CP 変換は余剰次元の空間座標に関して自明でない離散的変換を引き起こすことを議論する．一見，C 変換は時空間とは関係のない場の複素共役変換であり，また P 変換は余剰次元に影響しないように思えるが，実はそうではないことが分かる．上述のコンパクト化の仕方によって CP 対称性を破る機構が働くためには余剰次元が 1 つだけ（5 次元時空）では簡単過ぎることが分かるので，ここでは 6 次元以上の時空間を考える．更に，この機構は時空間の次元が 6, 8, 10 のように偶数次元であることを必要とするので，ここからは余剰次元は偶数次元であると仮定する．なお，5 次元時空のような奇数次元の場合には，コンパクト化によるものとは別のタイプの（自発的な）CP 対称性の破れの機構が可能であることが議論されている [29]．

結論から言うと，余剰次元が偶数次元の場合の CP 変換に関して次のようなことが言える [27]．

- 高次元時空においても，通常の 4 次元時空の場合と同様にして C や P 変換を容易に定義することができる．例えば C 変換については (3.31) と同様の $C^\dagger\gamma^M C = -(\gamma^M)^t$ (γ^M：高次元時空におけるガンマ行列) を満たす行列 C は容易に求められ，これを用いて $\Psi^c \equiv C\bar{\Psi}^t$ (Ψ：高次元時空におけるスピノール．t は転置) とフェルミオンの荷電共役を定義することができる．しかしながら，こうして定義される C, P 変換は一般に通常の 4 次元的な C, P 変換に帰着しないことが分かる．

  偶数次元 ($D = 6, 8, \ldots$) の場合の高次元のディラック・スピノールは，

$$N = 2^{[\frac{D-4}{2}]} \qquad ([\quad]：\text{ガウス記号}) \tag{B.4}$$

  個の 4 次元的なディラック・スピノールの集合に帰着するが，異なる 4 次元的スピノールの間には，高次元的なローレンツ対称性を反映してユニタリー変換 $U(N)$ の下での不変性という対称性が生じる．この $U(N)$ が作用

する N 個のスピノールの各々を成分とする N 次元空間を“内部空間”と呼ぼう．例えば，6 次元時空上の 1 個の超対称性を持つヤン・ミルズ理論は，4 次元から見ると 2 個の異なる超対称性を持つ $N=2$ 超対称的ヤン・ミルズ理論と同等になるが（正確には，トーラスといった単純な幾何学の多様体をコンパクト化された余剰次元とし，KK ゼロ・モードのみをとる“**naive dimensional reduction**”の場合），これも同じ理由による．問題は，高次元時空で定義された C, P 変換が，一般に通常の 4 次元的 C, P 変換と同時にこうした内部空間内でのユニタリー変換を引き起こしてしまい，通常の 4 次元的変換（各 4 次元的スピノールに独立に作用）に帰着しないということである．

- そこで，C, P 変換を通常の 4 次元的変換に帰着するように変更する．すると，興味深いことに，そのように変更された C, P 変換から構成される CP 変換は，余剰次元の空間座標に関して自明でない変換を引き起こすことが分かる．即ち，偶数次元の余剰次元の座標を 2 つずつペアにして，$\frac{D-4}{2}$ 個の複素座標を構成すると（例えば，6 次元時空の場合だと，2 つの余剰次元の座標 y, z から，複素座標 $\omega \equiv y + iz$ を構成できる），変更された CP 変換は，これらの複素座標に関する複素共役として作用することが分かる：

$$\mathrm{CP}: \quad \omega \quad \to \quad \omega^*. \tag{B.5}$$

3.4 節で CP 変換は場に関する複素共役の変換を含むことは既に学んだが，余剰次元の空間座標に関しても複素共役として作用するというのは興味深いことである．

これらのことを最も簡単な $D=6$ の 6 次元時空間の場合を例にとって具体的に確かめてみよう．6 次元の場合には (B.4) で $D=6$ とすると分かるように，6 次元のディラック・スピノール Ψ は 8 成分であり，2 個の 4 次元的スピノール ψ^i $(i=1,2)$ に分解できる $(N=2)$．ただし，ψ^i は 4 次元時空間の座標 x^μ の他に，2 つの余剰次元の座標 y, z にも依存していることに注意しよう．2 つの ψ^i が

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

のように上下に分離されるような基底をとると，この基底では 8×8 の 6 次元の 6 個のガンマ行列は

$$\begin{aligned} &\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_2 = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \\ &\Gamma^y = \gamma^5 \otimes i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma^z = \gamma^5 \otimes i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ -\gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.7}$$

となる．ここで，$\gamma^\mu \otimes I_2$ のような書き方は，各 4 次元的スピノール ψ^i の成分を $\psi^i_\alpha\,(i=1,2;\alpha=1,2,3,4)$ のように直積空間のテンソルのように見なしたとき，4 次元的スピノールの添字 α に関しては 4 次元のガンマ行列が，内部空間の添字 i に関しては 2×2 の単位行列 I_2 あるいは（i 倍の）パウリ行列が作用するということを表している．具体的には，例えば Γ^μ の掛け算 $\Psi' = \Gamma^\mu \Psi$ は $\psi'^i_{\ \alpha} = (\gamma^\mu)_{\alpha\alpha'}(I_2)^i{}_{i'}\psi^{i'}_{\alpha'}$ として与えられる．(B.7) で与えられるガンマ行列がクリフォード代数 $\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN}$ を満たすことは容易に確かめられる．

すると，$C^\dagger \gamma^M C = -(\gamma^M)^t$ を満たす 6 次元的な意味での C 変換の 8×8 行列 C は

$$C = C_4 \otimes \sigma_2 \qquad (C_4 = i\gamma_0\gamma_2) \tag{B.8}$$

とすればよい．ここで C_4 は通常の 4 次元的な C 変換の行列であり，また $\sigma_2^\dagger \sigma_i \sigma_2 = -(\sigma_i)^t$ というパウリ行列の性質から σ_2 がいわば内部空間での C 変換に対応する行列と見なせることから，(B.8) の行列が $C^\dagger \gamma^M C = -(\gamma^M)^t$ を満たすことは容易に理解できる．

しかし，(B.8) は内部空間の部分は σ_2 で非対角行列であり ψ^1 と ψ^2 の間の回転を伴う変換になっていて 4 次元的な C 変換に帰着しない．そこで，内部空間の部分の行列を対角行列になるように変更を加え，P 変換と共に以下のように通常の 4 次元的な C, P 変換に対応する変換を定義する：

$$\mathrm{P}: \quad \Psi_6 \quad \to \quad (\gamma^0 \otimes \sigma_3)\Psi_6, \tag{B.9}$$

$$\mathrm{C}: \quad \Psi_6 \quad \to \quad (C_4 \otimes \sigma_3)\bar{\Psi}_6^t. \tag{B.10}$$

ここで，内部空間の部分は単位行列 I_2 とするのが分かりやすいが，後の議論の都合上 σ_3 にとった．しかし，この選択に本質的な意味はない．

この変更された C, P 変換の下で時空座標がどのように変換するかは，スピノールの 2 次形式によってベクトル量を形成し，その変換を見れば分かる．即ち，$V^M = \bar{\Psi}\Gamma^M \Psi$ として，6 次元ベクトル V^M の (B.9), (B.10) の変換の下での変換性を求め，6 次元時空座標 $x^M = (x^\mu, y, z)$ も同様に変換すると見なすと，余剰次元座標 y, z について以下のような変換性が得られる：

$$\mathrm{P}: \quad (y,z) \quad \to \quad (y,z), \tag{B.11}$$

$$\mathrm{C, CP}: \quad (y,z) \quad \to \quad (y,-z). \tag{B.12}$$

即ち，CP 変換の下で余剰次元の座標は 1 つだけ符号を変えることが分かる．よって，

$$\omega = y + iz \tag{B.13}$$

のように複素数の座標を用いて余剰次元を表すことにすると，CP 変換はこの

複素座標に関する複素共役に他ならないことが分かる：

$$\text{CP}: \quad \omega \quad \to \quad \omega^*. \tag{B.14}$$

3.4 節の最後のほうで議論したように，複素共役を複素平面上で見ると実軸に関して線対称に折り返す変換であり鏡像変換と同様な離散的変換である．CP 変換が場に関してだけでなく余剰次元の座標についても離散的変換になっているというのは面白い事実である．

さて，CP 変換が余剰次元の座標に関しては複素共役に相当することが分かったので，コンパクト化する余剰次元の空間がこの複素共役の下で不変な空間でなければ，CP 対称性はそうした**余剰次元のいわば“幾何学的”性質によって破られる**ことになる．こうした破れは**一種の“自発的な CP 対称性の破れ”**とも言える．それはコンパクト化がなければ理論そのものはゲージ結合という実の結合定数のみを持ち CP 対称性を有するが，コンパクト化という理論の真空状態を規定するものによって CP 対称性が破れるからである．こうした，コンパクト化による CP 対称性の破れの典型的な例として，I 型超弦理論の場合に現れる 10 次元時空の 6 次元 **“カラビ・ヤウ (Calabi–Yau)” 多様体**へのコンパクト化に関して少し考察しよう．カラビ・ヤウ多様体の簡単な例として，4 次元の複素射影空間 CP^4 上において次の “定義多項式” で規定される多様体を考えよう：

$$\sum_{a=1}^{5}(\omega^a)^5 - C(\omega^1\omega^2\cdots\omega^5) = 0. \tag{B.15}$$

ここで ω^a $(a = 1\sim5)$ は 5 個の複素座標であり，CP^4 とは $z(z_1, z_2, \ldots, z_5)$（z は任意の複素数）を $(z_1, z_2, \ldots, z_5)$ と同一視するものである．したがって CP^4 は複素 4 自由度を持つが (B.15) で更に 1 つ自由度が減って複素 3 自由度になり，6 次元空間を表すことになる．(B.15) において係数 C は一般に複素数で良いが，仮に C が実数だとすると，(B.15) の複素共役をとることにより，ω^a が多様体上の点を表す座標で (B.15) を満たすとき，$(\omega^a)^*$ もやはりこの式を満たし，したがってやはり多様体上の点を表すことが分かる．つまり，このカラビ・ヤウ多様体は CP 変換の下で不変でありコンパクト化の後も CP 対称性は破れないはずである．しかし，C が複素数だとすると余剰次元はもはや CP 不変でなくなるので，CP 対称性は破れることになる．実際，この場合の湯川結合には re-phasing でも消えない CP 位相が存在することが具体的にも確かめられている [27].

こうした超弦理論で議論されるカラビ・ヤウ多様体は 6 次元であり，またそれを記述する計量テンソルも具体的に書き下せないなど抽象的で扱いが難しい．超弦理論に限定せず，一般の高次元的場の理論（ゲージ理論）で，またより簡単なコンパクト化した余剰次元を用いて CP 対称性を破ることはできないであろ

うか．一番単純な，2 次元の余剰次元（時空は 6 次元）を持った GHU シナリオにおいて，**オービフォールド (orbifold)** という比較的簡単で扱いやすい空間を余剰次元として採用することで CP 対称性を破ることが可能であることが示されている [28]．オービフォールドについて簡単に説明しよう．オービフォールドは多様体をそれ自身が持つ離散的対称性で "割った" ものとして定義される．"割る" とはどういうことであろうか．オービフォールドでは，離散的対称性の変換で元の多様体上の P という点が P', P", 等の他の点に変換されるとき，これらの点をすべて同一視する．すると独立な点の数は，元々の多様体上の点の数を，離散的変換で互いに結びつく点の総数で割ったものになる．これが "割る" ということの意味である．ただ実際には無限個の点を割ってもまた無限個の点が残るが．一番簡単な 1 次元的なオービフォールドは円 S^1 を Z_2 で割ったものであり，S^1/Z_2 と書かれる．Z_2 とは S^1 を x–y 平面上の原点を中心とする半径 R の円としたときに，x 軸に関して線対称に折り返すという離散的変換である．2 回変換すると恒等変換になるので，2 つしか元を持たない群であるので Z_2 と呼ばれる．今考えたい 2 次元の余剰次元として考えられるオービフォールドは，2 つの余剰次元のどちらの方向にも円になっているトーラス T^2 を Z_2, Z_4 等で割ったものである．トーラスとは，具体的には 2 つの余剰次元の座標を y, z として $y + 2\pi R_1$ と y が，また $z + 2\pi R_2$ と z が同じ点になるような，つまり，どちらの方向にも周期境界条件を満たすような多様体である．ドーナツを思い描けばよいであろう．簡単のために $R_1 = R_2 = R$ としよう．すると，割り算をする離散的対称性として，最も簡単な Z_2 では無理であるが，少し複雑にして Z_4 にするとオービフォールドの幾何学的性質によって CP 対称性が破れることが分かる．オービフォールドはトーラスの空間をある条件を付けて限定しているだけなので，カラビ・ヤウ多様体の場合とは違い，その上を伝播する場の y, z 依存性は三角関数を用いて具体的に記述できる．それを用いてゲージ相互作用，湯川相互作用を具体的に計算し，CP 対称性が破れているかどうかを確かめれば良いが，トーラスを Z_4 で割った T^2/Z_4 オービフォールドが CP 対称性を破っているのは，具体的計算をしなくとも，次のような幾何学的な議論から容易に理解することが可能である．まずトーラス T^2 は y–z 平面上の，$-\pi R \leq y \leq \pi R$, $-\pi R \leq z \leq \pi R$ で表される正方形において，左右，上下の辺を同一視したものである．**Z_4 で割る**というのは，**原点の周りの 90 度の回転**で結びつく点を同一視するということである．複素座標 $\omega = y + iz$ を複素平面上の点で表すと，90 度回転は ω に i を掛けることと同じなので，同一視の条件は

$$i\omega \sim \omega \tag{B.16}$$

と書ける．ここで $\sim$ は同一視することを表す．一方，CP 変換は複素座標の複素共役をとることと同じなので，CP 変換後この条件は

$$(-i)\omega^* \sim \omega^* \tag{B.17}$$

となり，したがって同一視するのは今度は -90 度の回転で結びつく点どうしということになる．つまり，同一視する条件が CP 変換不変ではなく，したがってこのオービフォールドは CP 対称性を破っていることになるのである．CP 対称性が破れていることは具体的計算によっても確かめられている[28]．なお，こう考えると何故 Z_2 で割ったオービフォールドの場合に CP 対称性が破れないのか直観的にも分かる．それは -180 度の回転は 180 度の回転と同等であるからである．

参考文献

[1] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).

[2] K. Fujikawa, B.W. Lee and A.I. Sanda, *Phys. Rev.* **D6**, 2923 (1972).

[3] M.K. Gaillard and B.W. Lee, *Phys. Rev.* **D10**, 897 (1974).

[4] T. Inami and C.S. Lim, *Progr. Theor. Phys.* **65**, 297 (1981); **65**, 1772 (1981)(Erratum).

[5] T. Morii, C.S. Lim and S.N. Mukherjee, "The Physics of the Standard Model and Beyond", World Scientific Publishing (2002).

[6] T. Appelquist and J. Carazzone, *Phys. Rev.* **D11**, 2856 (1975).

[7] M. Peskin and T. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 964 (1990).

[8] T. Yanagida, Proceedings of "Workshop on Unified Theory and Baryon Number in the Universe", ed. by O. Sawada and A. Sugamoto, KEK, Japan (1979); M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in "Supergravity", ed. by P.van Nieuwenhuizen and D.Z. Freedman, North Holland, New York (1979).

[9] I.I. Bigi and A.I. Sanda, "CP Violation", Cambridge Univ. Press (2000).

[10] Particle Data Group, Particle Data Group website: http://pdg.lbl.gov

[11] E. Kolb and M.S. Turner, "The Early Universe", Addison–Wesley (1990).

[12] M. Fukugita and T. Yanagida, "Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics", Springer (2003).

[13] M. Yoshimura, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 281 (1978); D. Toussaint, S.B. Treiman, F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev.* **D19**, 1036 (1979); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 850 (1979); M. Yoshimura, *Phys. Lett.* **B88**, 294 (1979).

[14] J.N. Fry, K.A. Olive and M.S. Turner, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 2074 (1980); *Phys. Rev.* **D22**, 2977 (1980).

[15] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976); *Phys. Rev.* **D14**, 3432 (1976).

[16] N.H. Christ, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976); *Phys. Rev.* **D21**, 1591 (1980).

[17] F.R. Klinkhammer and N.S. Manton, *Phys. Rev.* **D30**, 2212 (1984); N.S. Manton, *Phys. Rev.* **D28**, 2019 (1983).

[18] V.A. Kuzmin, V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **B155**, 36 (1985).

[19] M.E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys.* **B287**, 757 (1987); **B299**, 797 (1988); この話題に関するレビューとしては，A.G. Cohen, D.B. Kaplan and A.E. Nelson, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43**, 27 (1983).

[20] M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **B174**, 45 (1986).

[21] T.D. Lee, *Phys. Rev.* **D8**, 1226 (1973); *Phys. Rep.* **96** (1979).

[22] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 657 (1976).

[23] S.L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D15**, 1958 (1977).

[24] N.S. Manton, *Nucl. Phys.* **B158**, 141 (1979); D.B. Fairlie, *Phys. Lett.* **B82**, 97 (1979).

[25] Y. Hosotani, *Phys. Lett.* **B126**, 309 (1983); *Phys. Lett.* **B129**, 193 (1983); *Annals Phys.* **190**, 233 (1989).

[26] H. Hatanaka, T. Inami and C.S. Lim, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 2601 (1998); M. Kubo, C.S. Lim and H. Yamashita, *Mod. Phys. Lett.* **A17**, 2249 (2002).

[27] C.S. Lim, *Phys. Lett.* **B256**, 233 (1991).

[28] C.S. Lim, N. Maru and K. Nishiwaki, *Phys. Rev.* **D81**, 076006 (2010).

[29] Y. Adachi, C.S. Lim and N. Maru, *Phys. Rev.* **D80**, 055025 (2009).

索　引

欧字

ア

カ

著 者 略 歴

林 青司
りんせいじ

1981 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
理学博士（東京大学 1981 年）
1984 年　米国立ブルックヘブン国立研究所研究員
1987 年　高エネルギー物理学研究所 (KEK) 助手
(1990 年　ヨーロッパ原子核研究センター (CERN) 研究員)
1992 年　神戸大学理学部助教授
1996 年　神戸大学理学部教授
現　在　神戸大学大学院理学研究科物理学専攻教授
専　門　素粒子論
主要著書
“THE PHYSICS OF THE STANDARD MODEL AND BEYOND”
（共著，World Scientific, 2002）
“素粒子物理学ハンドブック” 標準模型を越える統一理論
（朝倉書店，2010）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-91
『CP 対称性の破れ　小林・益川模型から深める素粒子物理』
著　者　林 青司
2012 年 6 月 25 日　　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木 下 敏 孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社　　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤 眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博